

問題6 力学 (100点)

以下の文章を読んで問い(問1, 問2)に答えよ。計算の途中過程も書くこと。

問1 位置座標 (x, y) は2次元極座標において r と φ (単位はラジアン) を用いて

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

と表される。

- (1) 質点(質量 m) の r 方向と φ 方向の運動方程式は, r 方向の外力 F_r , φ 方向の外力 F_φ を用いて

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r \\ m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) &= F_\varphi \end{aligned}$$

と, それぞれ表せることを示せ。

- (2) 設問(1)の2次元極座標表示の運動方程式を, 次ページ図1左のように質量 m のおもりを支点 **A** より一定の長さ l のひもでつるした単振子に適用し, 振動の周期を求めよ。重力加速度の大きさは g とし, 摩擦や抵抗は無視できるとする。この設問に関しては単振子の最大振れ角 θ_0 は, $\sin\theta_0 = \theta_0$ の近似が成立するほど小さいとする。
- (3) ひもにかかる張力を l, m, g, θ_0 , 振り子の振れ角 θ を用いて表せ。また, 張力が最大となるのはどのようなときか答えよ。
- (4) 振り子の1周期の間に, ひもにかかる張力が成す仕事を求めよ。
- (5) 次に, 次ページ図1右のように, 質量 m のおもりを支点 **B** より一定の長さ l のひもでつるし, 鉛直方向との間の角度を θ_0 に保ちながら等速で円運動をしている状況を考える(円錐振り子)。この円運動の周期と, ひもにかかる張力を求めよ。
- (6) 円軌道の中心点 **O**, および支点 **B** のまわりのおもりの角運動量の大きさを, それぞれ求めよ。また, それぞれの角運動量の向きが時間的に一定であるかどうか答えよ。
- (7) 設問(5)の円錐振り子と, 設問(2)の単振子では, どちらの力学的エネルギーがどれだけ大きいか式を用いて答えよ。

(次ページに続く)