問題８　物理数学（100 点）

以下の問い（**問１～問５**）に答えよ。

問１　次の周期2πの関数$f(x)$をフーリエ級数で表せ。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ x & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

問２　以下の設問（１），（２）に答えよ。

（１）次の常微分方程式が完全微分形であることを示し，その一般解を求めよ。

$$y + \frac{2}{y^2} + \left(x + 2y - \frac{4x}{y^3}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

（２）次の連立常微分方程式の一般解を求めよ。

$$3\frac{du}{dx} + 2\frac{dv}{dx} + u + v = 0$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + 7u + 5v = 0$$

問３　ベクトル演算子に関する以下の設問（１），（２）に答えよ。ただし，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$は直交座標系における$x, y, z$方向の単位ベクトルである。

（１）$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$，$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ ならば，

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 0$$

が成り立つことを証明せよ。ここで，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$は$x, y, z$の関数であり，$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ である。

（２）次の式を証明せよ。ただし，$\boldsymbol{C}$は一定のベクトルである。

$$\mathrm{div}\big((\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{C}\big) = |\boldsymbol{C}|^2$$

ここで，$\boldsymbol{C} = C_x\boldsymbol{i} + C_y\boldsymbol{j} + C_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$である。

問４　以下の関係を証明せよ。ただし，iは虚数単位である。

$$\cosh(iy) = \cos y,\quad \sinh(iy) = i\sin y$$

問５　次の行列Aの固有値と規格化した固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$