2023年度
九州大学大学院理学府
修士課程地球惑星科学専攻
入学試験問題

（全１６ページ）
（２００点）

注意事項

(1) 次の配布物が正しく配られていることを確認すること。
問題冊子　１冊
解答用紙　２枚

(2) この問題冊子には，合計８題が出題されている。

問題１　地質学　**問題２　古環境学・古生物学**　**問題３　岩石学・鉱物学**
問題４　化学　**問題５　熱力学**　**問題６　力学**
問題７　電磁気学　**問題８　物理数学**

(3) **第１志望・第２志望ともに**，岩石循環科学，地球進化史，古環境学，惑星系形成進化学，有機宇宙地球化学，地球システム化学，地球内部物質学，地球惑星博物学の各研究グループを志望する受験生は，８問題のなかから任意に２問題を選択すること。

(4) **第１志望または第２志望で**，太陽地球系物理学，宇宙地球電磁気学，大気流体力学，気象学・気候力学，地球深部物理学，地球内部ダイナミクス，観測地震・火山学，地震火山減災科学の各研究グループを志望する受験生は，**問題５～問題８**（上記の下線を引いた問題）のなかから少なくとも１問題を含む，合計２問題を選択すること。下線を引いた問題以外から２問題を選択した場合は，無効（０点）とするので注意すること。

(5) 解答は，問題毎に別の解答用紙を用い，枠内に記入すること（裏面使用可）。

(6) 二枚の解答用紙にそれぞれ，受験番号，氏名，選択した問題の番号を記入すること。

(7) この問題冊子は持ち帰ってよい。

問題１　地質学　（100 点）

以下の問い（**問１，問２**）に答えよ。

問１　次の文章を読んで，設問（１）～（６）に答えよ。

地球上では重力が働くために，侵食された土砂は高いところから低いところに運ばれていく。降雨によってもたらされた水は，地表に露出する岩石を削り山岳地域から平野を通り最終的には海に流れこむ。その時いろいろな場所で(a)<u>砕屑粒子を堆積させる</u>。河口付近の海岸線では，河川の力と波の力のバランスにより海岸は独特の地形を形成する。アメリカ東海岸やメキシコ湾沿いの海岸では，岸と平行に砂が集まり（　ア　）を形成している。海に入ると大陸棚では砕屑物が厚く堆積しており，大陸斜面では堆積層が不安定になり，地層がすべることで（　イ　）が発達する。沈み込み帯を持つ活動的縁辺部の海底では，(b)<u>海溝陸側斜面に逆断層が発達する</u>。また，最も深い部分は海溝となる。海溝では(c)<u>（　ウ　）によって運ばれたタービダイト</u>が堆積する。大洋底の堆積物は，火山弧に近い地域では火山灰を含む半遠洋性堆積物からなり，深海平原では(d)<u>赤色粘土などほとんど炭酸塩鉱物を含まない堆積物</u>が形成される。

（１）　文中の空所（　ア　）～（　ウ　）にあてはまる語句を下記の語群よりそれぞれ選択せよ。

slumping,　meandering channel,　gravity current,　braided stream,
barrier island,　ripple,　gravel,　pebble,　conglomerate,　melange

（２）　山地に分布する岩石は風化作用によって運ばれやすい状態になる。風化作用の種類とその内容について説明せよ。

（３）　下線部(a)について，砕屑粒子が河川によって山岳地域から海に運ばれるときに，大量に堆積する場所の地形的名称を２つ記せ。また，なぜその場所で堆積が起こりやすくなるか説明せよ。

（４）　下線部(b)について，海溝陸側斜面にて逆断層の活動で形成する堆積盆を下記の語群より選択せよ。

fore-arc basin,　back-arc basin,　intra-arc basin,　pull-apart basin,
half-graben,　horst and graben,　basin and range,　foreland basin

（５）　下線部(c)について，タービダイトの模式的な柱状図を図示し，その特徴を記せ。

（６）　下線部(d)について，深海平原で炭酸塩鉱物が含まれにくい理由を述べよ。

（次ページに続く）

問２　次の文章を読んで，設問（1）～（6）に答えよ。

古生代後半，ローレンシア大陸とゴンドワナ大陸が衝突して超大陸パンゲアを形成した。アパラチア造山帯はその衝突境界に位置しており，6000 km 以上におよぶ大山脈を形成していた。アメリカ南東部では衝突した地質構造が残っており，衝突帯の地質断面図が復元されている（**図１**）。

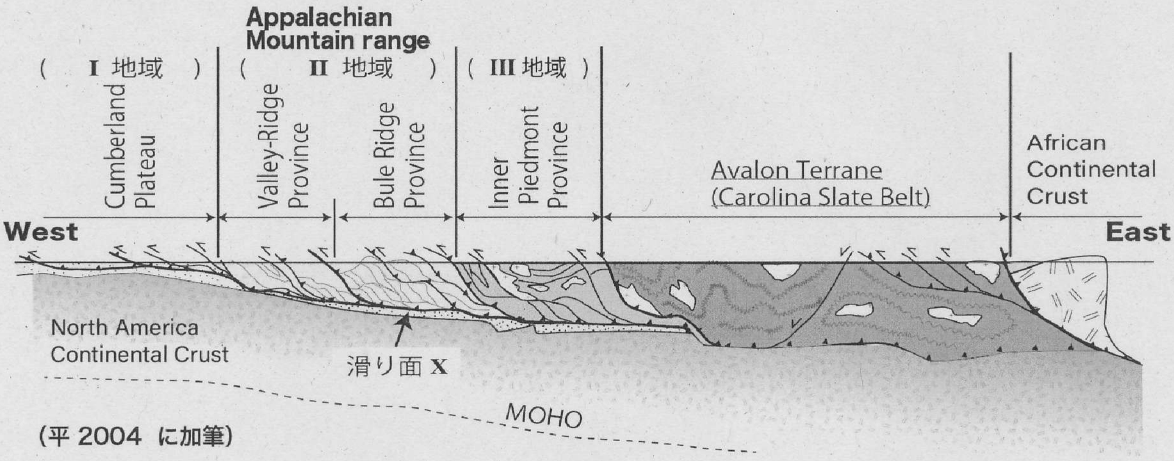


図１　アパラチア造山帯南部の東西地質断面図

（1）　I 地域では，造山帯から土砂が供給されて堆積盆を作っている。この堆積盆には見られない地層を，下記の語群より全て選択せよ。
礫岩層，三日月湖堆積物，赤色砂岩，石炭層，放散虫層状チャート，蒸発岩，河川堆積物，扇状地堆積物，氾濫原堆積物，サンゴ礁

（2）　衝突帯に一般的に見られる II 地域のような逆断層や褶曲が繰り返す地質帯の一般的な名称を述べよ。

（3）　II 地域には，東方向に傾斜した逆断層が発達する。本地域の逆断層面上に多数残されるスリッケンラインを示すステレオ投影図として最も適当なものを**図２**の A ～ E から選択せよ。

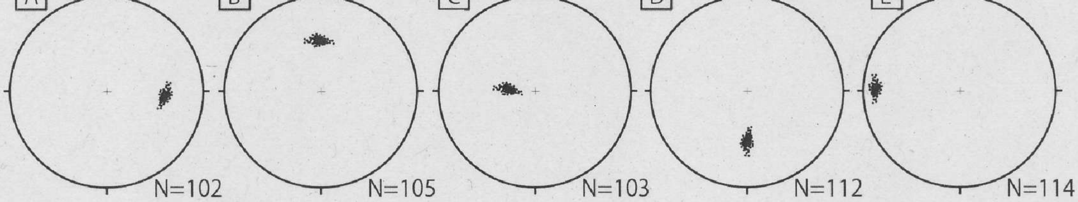


図２ 断層面上にみられるスリッケンラインのステレオ投影図（下半球投影）

（ 次ページに続く ）

（4） 断層面上に残る組織から断層の動いた方向を明らかにしたい。断層が動いた方向を示す組織について，図を使って説明せよ。

（5） III 地域では，粘板岩や千枚岩中に西方向に傾斜した劈開が発達している。この地域で見られる劈開を示すステレオ投影図を**図３**の $\boxed{A}$〜$\boxed{E}$ から選択せよ。

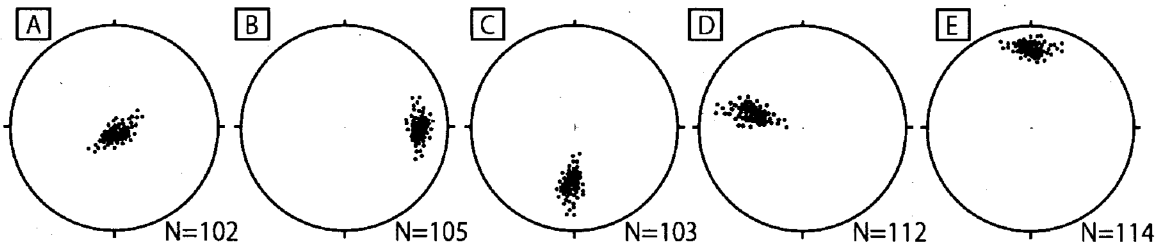


図３ 粘板岩中にみられる劈開のステレオ投影図（下半球投影）

（6） 大陸衝突により**図１**中にみられる低角度の滑り面 X が形成された。この滑り面 X の一般的な名称を記せ。また，アパラチア山脈にみられる地質構造のフェルゲンツ方向を記せ。

問題２　古環境学・古生物学（100 点）

以下の問い（**問１，問２**）に答えよ。

問１　次の文を読んで，設問（１）～（３）に答えよ。

層序区分とは，地層や岩体をその特徴に基づいて「あるまとまり」（層序単元：stratigraphic unit）に分けることである。図１は，地層断面をそれぞれの基準で異なる層序単元に区分した例である。

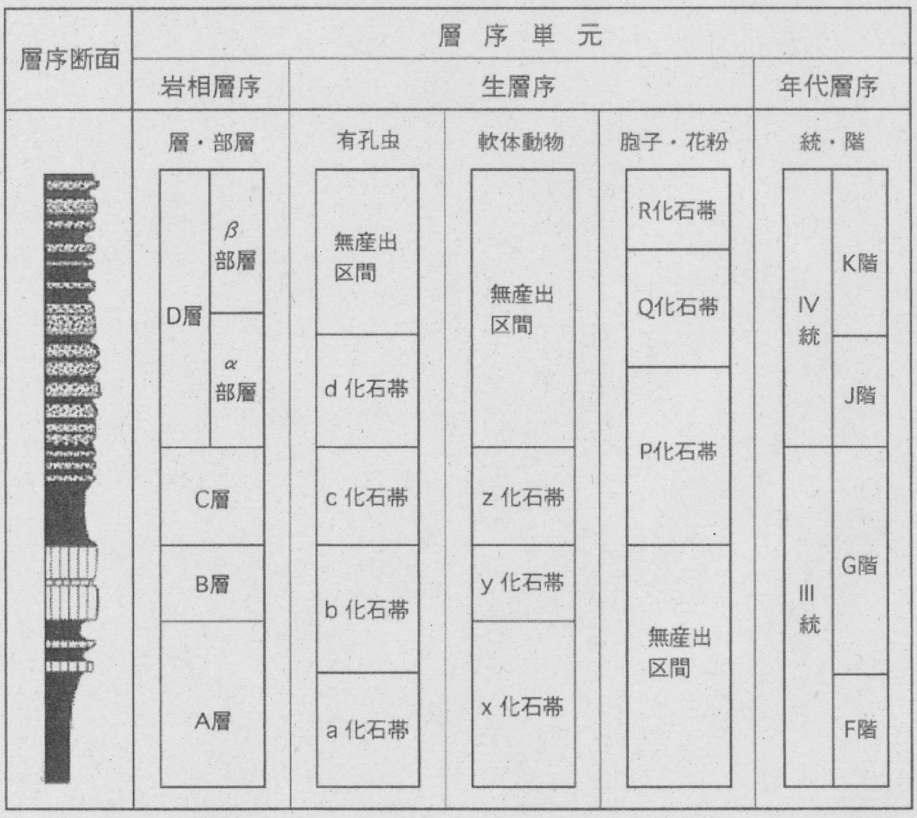


図１　層序断面における異なる層序区分の例（日本地質学会訳編，2001 を改変）

（１）岩相層序の層序単元は，地層を構成する礫，砂，泥などの岩質によって区分され，層，部層のように階層的な体系で構成されている。

（ａ）層，部層以外の岩相層序単元を２つ答えよ。

（ｂ）岩相層序区分の階層的な体系について 100 字程度で説明せよ。

（次ページに続く）

（問題２のつづき）

（２）生層序を区分する基本的な層序単元は，化石帯（生物帯：biozone）である。化石帯はどのような特徴に基づいて区分されるのか，100 字程度で説明せよ。

（３）年代層序は，地層が形成された年代によって区分される。その層序単元は，界，系，統，階からなり階層的に体系づけられている。また，それぞれに時間単位としての地質年代が対応している。

（ａ）年代層序の界，系，統，階に対応する地質年代を，それぞれ順に答えよ。

（ｂ）年代層序区分の層序単元はどのように定義されるのか，「模式」という用語を使って 50 字程度で説明せよ。

問２　次の９つの用語から４つを選び，それらについて簡潔に説明せよ。

（１）斉一説（uniformitarianism）
（２）タフォノミー（taphonomy）
（３）バージェス頁岩動物群（Burgess shale fauna）
（４）海洋無酸素事変（OAE: Oceanic Anoxic Event）
（５）メッシニアン塩分危機（Messinian salinity crisis）
（６）縄文海進（Jomon transgression）
（７）バイオマーカー（biomarker）
（８）ミランコビッチ・サイクル（Milankovitch cycle）
（９）炭素 14 年代測定法（carbon 14 dating method）

問題3　岩石学・鉱物学（100点）

以下の問い（問1～問4）に答えよ。

問1 ケイ酸塩鉱物の分類・特徴・性質に関する以下の用語を説明せよ。また，相当するケイ酸塩鉱物の名称を1つ記せ。

（1）三斜晶系

（2）ネソケイ酸塩

（3）固溶体

問2 火成岩に関する以下の設問（1），（2）に答えよ。

（1）volcanic rock と plutonic rock の違いを説明せよ。模式図を用いてもよい。

（2）図1は，化学組成を用いた火山岩の分類図である。領域A，B，Cに相当する岩石の名称を記せ。

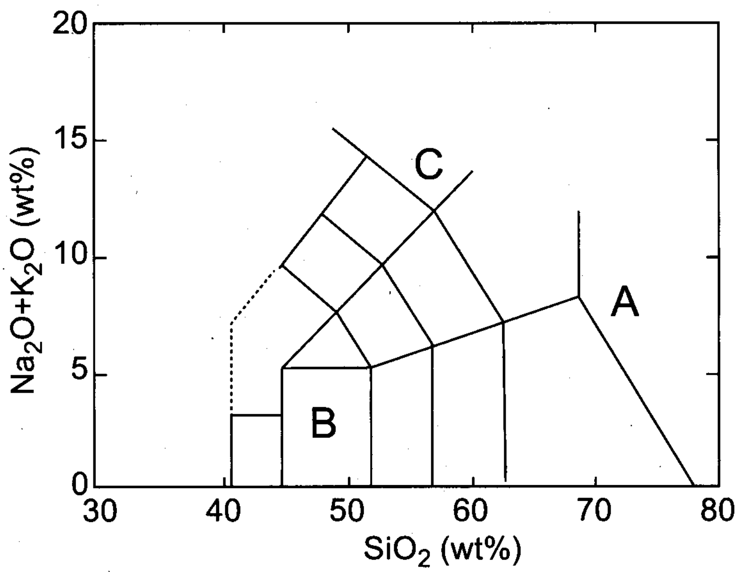


図1　Na_2O+K_2O と SiO_2 を用いた火山岩の分類図

問3 変成岩と変成作用に関する以下の設問（1）～（3）に答えよ。

（1）regional metamorphism について説明せよ。またその事例を挙げよ。

（2）contact metamorphism について説明せよ。

（3）泥質変成岩と塩基性変成岩の違いを説明せよ。

（次ページに続く）

問４ 図２は，３成分（A，B，C）共融系の相平衡図を組成（wt%）平面に投影した図である。AとB，BとC，CとAの共融線は，各辺の中点から垂直に伸びているとする。数字は液相面上の等温線（点線）の温度（K）である。端成分A，B，Cの結晶の融点はすべて1600 Kとし，点Dは1150 K，A-B-Cの共融点Eは1100 Kである。以下の設問（1）～（5）に答えよ。ただし，設問（1），(3)，(5）の解答の組成は，各成分の整数比（例えば、A：B：C＝1：2：3）として答えよ。

（1）点Pで示される組成を答えよ。

（2）辺AB上の相平衡図を，横軸に組成，縦軸に温度を取って概略図を描け。

（3）点Pで表される組成の液が，冷却平衡結晶化する際，最初に晶出する結晶の組成を答えよ。

（4）点Pで表される組成の液が，冷却平衡結晶化し，1150 Kになる直前の液と結晶の量比を簡単な整数比で答えよ。

（5）A=20 wt%，B=30 wt%，C=50 wt%の組成の岩石が加熱融解するとき，最初にできる液の組成を答えよ。

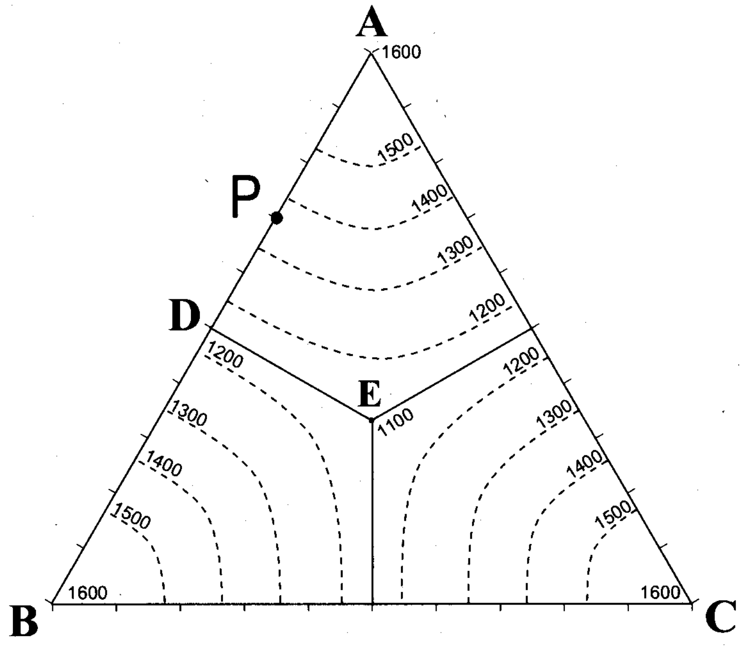


図２　３成分共融系の相平衡図

問題4　化学（100点）

以下の問い（問1，問2）に答えよ。必要ならば，$\sqrt{2}=1.41$，$\sqrt{3}=1.73$ を用いよ。

問1　塩化ナトリウムの結晶 $NaCl_{(s)}$ は規則的に配列した Na^+ と Cl^- からなるイオン結晶である。以下の設問（1）～（6）に答えよ。

（1）イオン結晶における塩化ナトリウム型構造について，単位格子中のナトリウムイオンと塩化物イオンの数やそれぞれのイオンの位置関係がわかるように，図を用いて説明せよ。

（2）$NaCl_{(s)}$ における塩化物イオンのイオン半径が 181 pm であるとき，ナトリウムイオンのイオン半径の下限値を有効数字3桁で計算せよ。

（3）$NaCl_{(s)}$ を強く加熱すると、分子からなる蒸気 $NaCl_{(g)}$ を経て、2種の原子 Na, Cl に解離するか，2種のイオン Na^+, Cl^- に解離するか，を理由とともに答えよ。ただし，ナトリウムのイオン化エネルギーは 496 kJmol^{-1}，塩素の電子親和力は 349 kJmol^{-1} である。

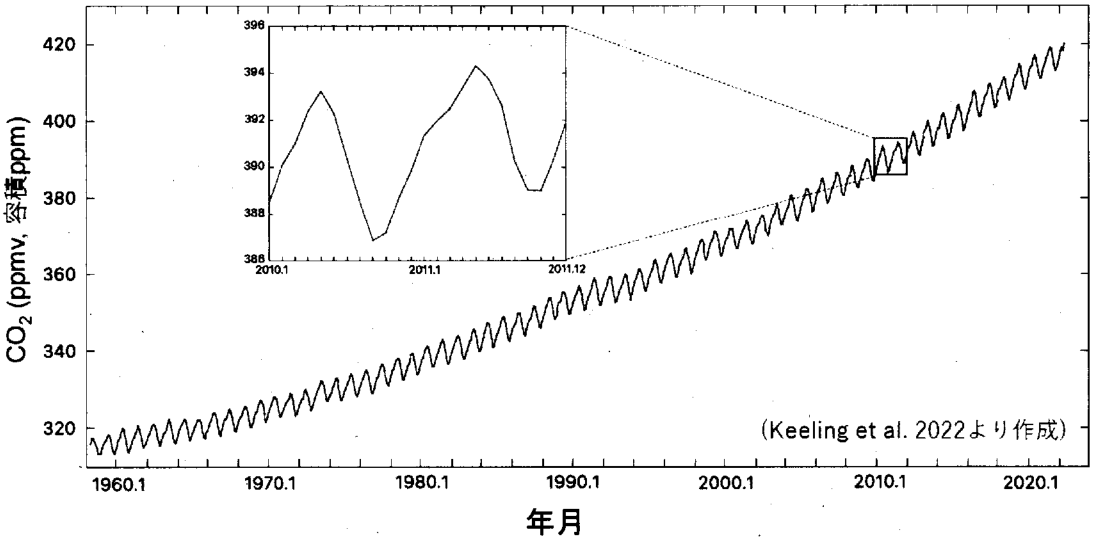
（4）$NaCl_{(s)}$ の格子エネルギーは 767 kJmol^{-1} である。塩化リチウムの結晶 $LiCl_{(s)}$ と塩化カリウムの結晶 $KCl_{(s)}$ におけるそれぞれの格子エネルギーは $NaCl_{(s)}$ の格子エネルギーより大きいか小さいか。簡潔な理由とともに答えよ。

（5）$NaCl_{(s)}$ を水に入れると容易に溶解する。ナトリウムおよび塩素の水和熱（水和エンタルピー）がそれぞれ −420.8 kJmol^{-1}, −362.8 kJmol^{-1} であるとき，$NaCl_{(s)}$ の水への溶解熱（溶解エンタルピー）を有効数字3桁で計算せよ。

（6）水への $NaCl_{(s)}$ の溶解度に比較して，フッ化ナトリウム結晶 $NaF_{(s)}$ と臭化ナトリウム結晶 $NaBr_{(s)}$ それぞれの溶解度は大きいか小さいか。簡潔な理由とともに答えよ。

（次ページに続く）

問2　ハワイ山頂付近における過去約63年間にわたる大気中の二酸化炭素(CO_2)の月平均濃度の変化を下図に示した。以下の設問（1）～（6）に答えよ。



（1）図から CO_2 濃度の a)長期間にわたる変化と，b)年単位の周期的変動を読み取ることができる。それぞれについて，変化の様子とその要因を説明せよ。

（2）大気中 CO_2 の炭素同位体比（$\delta^{13}C$ 値）を測定した場合，年単位の周期的変動における CO_2 の増加時における $\delta^{13}C$ 値は減少時に比べて，a)大きくなるか，b)変わらないか，c)小さくなるか，を理由とともに答えよ。

（3）大気中の CO_2 はヘンリーの法則に従って雨水に溶解する。ヘンリーの法則を説明せよ。

（4）25℃の大気中で 394 ppmv の CO_2 が存在するとき，それと化学平衡にある雨水の水素イオン濃度($molL^{-1}$)を有効数字2桁で計算せよ。ただし，25℃におけるヘンリー定数を 3.40×10^{-2} $molL^{-1}atm^{-1}$, 炭酸の一次酸解離定数を 4.47×10^{-7} とする。

（5）CO_2 を含む雨水が陸上に降り注ぐと鉱物の風化を促進する。ケイ灰石 $CaSiO_3$ を風化する化学反応式を記せ。

（6）海水中で生成する炭酸カルシウム $CaCO_3$ の $\delta^{13}C$ 値は大気中の CO_2 に比べて，a)大きいか，b)同じか，c)小さいか，を理由とともに答えよ。

問題 5　熱力学（100 点）

以下の問い（**問 1**，**問 2**）に答えよ。

問 1 一成分一相系の熱力学に関して，以下の設問（1）～（6）に答えよ。以下の設問においては，T は絶対温度，S はエントロピー，P は圧力，V は体積，U は内部エネルギー，F はヘルムホルツの自由エネルギー，n は気体のモル数，R は気体定数である。

（1）内部エネルギー U の全微分の式が

$$dU = TdS - PdV$$

であることを用いて，ヘルムホルツの自由エネルギー F の全微分の式が

$$dF = -SdT - PdV \tag{i}$$

となることを示せ。

（2）F の全微分の式 (i) からマクスウェルの関係式のひとつ

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \tag{ii}$$

が導かれることを説明せよ。

（3）定積熱容量 C_V の定義を説明し，その定義から

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \tag{iii}$$

が導かれることを説明せよ。

（4）マクスウェルの関係式 (ii) と熱容量の式 (iii) から熱容量に関して

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V \tag{iv}$$

が導かれることを示せ。

（5）マクスウェルの関係式 (ii) と熱容量の式 (iii) と理想気体の状態方程式

$$P = \frac{nRT}{V}$$

を用いて，$C_V = 3nR$ であるような理想気体のエントロピー $S(T,V)$ を求めよ。ただし，温度 T_0，体積 V_0 におけるエントロピーを S_0 とせよ。

（次ページに続く）

（6）実際の気体では状態方程式が理想気体と少しずれる。実在気体のモデル方程式の一つである Redlich-Kwong の状態方程式

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2 a}{T^{1/2} V(V + nb)}$$

と定積熱容量

$$C_V = 3n\left[R + \frac{a}{4bT^{3/2}} \ln\left(1 + \frac{nb}{V}\right)\right]$$

は関係式 (iv) を満たしている。ここで，a, b は定数である。このような状態方程式と定積熱容量を持つ気体のエントロピー $S(T, V)$ を求めよ。ただし，温度 T_0，体積 V_0 におけるエントロピーを S_0 とせよ。

問２ ある固体の純物質をある圧力において加熱したところ，最初の温度 T_1 では相Aで，温度 T_K において相Aから相Bに相転移し，最後の温度 T_2 においては相Bだった。このときのギブズの自由エネルギーは，温度の関数として**図１**のようになっている。２つの線は相Aもしくは相Bのギブズの自由エネルギーを表している。このとき以下の設問（１）～（４）に答えよ。

（1）図の実線と破線のうちどちらが相Aのギブズの自由エネルギー G_A でどちらが相Bのギブズの自由エネルギー G_B か答えよ。また，そう判断した理由も述べよ。

（2）ギブズの自由エネルギーの温度に対する傾き $(\partial G/\partial T)_P$ は何の物理量に対応するか答えよ。

（3）相Aから相Bへの転移は発熱変化か，それとも吸熱変化か答えよ。また，そう判断した理由も述べよ。

（4）$(\partial^2 G/\partial T^2)_P < 0$ となることから，ギブズの自由エネルギーを表す曲線は温度に対して上に凸になっている。$(\partial^2 G/\partial T^2)_P$ は何の物理量の組み合わせに対応するか答えよ。また，$(\partial^2 G/\partial T^2)_P < 0$ となることはどのような議論から導かれるか，議論のあらすじを答えよ。一文程度の短いあらすじでかまわないが，長めに書いてもよい。

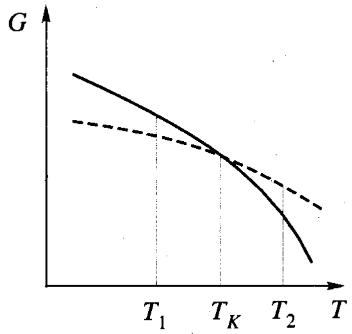


図１　定圧条件で相転移点 T_K 付近のギブズの自由エネルギーの温度依存性。実線と破線のいずれか一方が相Aの，他方が相Bのギブズの自由エネルギーを表す。

問題6　力学　(100点)

以下の問い（**問1〜問3**）に答えよ。計算の途中経過も書くこと。

問1　次の文章を読んで設問(1)〜(4)に答えよ。

図1に示すように，水平面となす角θの斜面上で，時刻$t=0$において質量mの質点を斜面となす角φで投げた（初速度をv_0とする）。なお，質点には鉛直下向きに重力のみがはたらく。ただし重力加速度の大きさをgとする。時刻$t=0$における質点の位置を原点Oとして，斜面に平行な方向にx軸，斜面に垂直な方向にy軸をとる。ただし，$0<\varphi+\theta<\frac{\pi}{2}$とする。

（1）x方向，y方向の運動方程式を示せ。

（2）設問(1)の運動方程式を解くことにより，時刻tにおける質点の位置(x,y)を求めよ。

（3）質点が再び斜面に到達するときの時刻とその時のx座標の値を求めよ。

（4）質点が再び斜面に到達する点が，原点Oから最も遠くなる時の角φを求めよ。

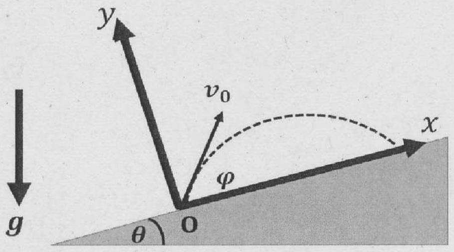


図1

問2　図2に示すように，水平台の端に滑らかに回転し，質量の無視できる滑車をつけた。質量M_1と質量M_2の物体を質量の無視できるひもでつないだ。ひもが弛まないように滑車にかけて質量M_1の物体を水平な台の上に置き，質量M_2の物体は下に吊るした状態で，二つの物体を静かに手から離した。質量M_1, M_2の物体には鉛直下向きに重力がはたらき，図2に示すように矢印の方向に動き始めた。ただし，重力加速度の大きさをgとする。動き始めた瞬間から後は，水平台と質量M_1の物体の間には動摩擦係数をμとする摩擦力が働くものとして，質量M_1の物体がlだけ移動したときの質量M_1の速度を求めよ。

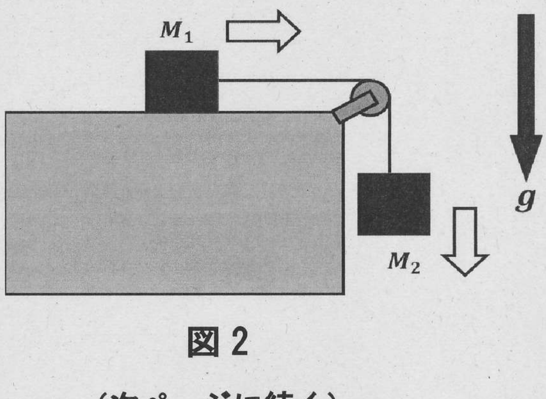


図2

（次ページに続く）

問３　次の文章を読んで設問(１)～(４)に答えよ。

図３に示すように，自然長がlで質量の無視できる２つの同じばね（ばね定数をkとする）にそれぞれ質量mの質点(おもり)を付けてつなげ，天井から吊るした。質点は上から質点 A，質点 B とする。質点には鉛直下向きに重力がはたらくとする。ただし，重力加速度の大きさをgとする。ばねを天井から吊るした点を原点にして下向きにx軸をとる。時刻tにおける質点の位置を$x_1(t)$, $x_2(t)$とする。

(１)質点 A および質点 B の運動方程式を求めよ。
(２)質点 A および質点 B のつりあいの位置をx_{10}, x_{20}とする。x_{10}, x_{20} をm, k, l, gを用いて表せ。
(３)$y_1(t) \equiv x_1(t) - x_{10}$, $y_2(t) \equiv x_2(t) - x_{20}$ で定義される新たな変数を導入する。設問(１)で求めた運動方程式を $y_1(t)$, $y_2(t)$ を用いて書き直せ。
(４)このようなばねー質点系においては，質点 A と質点 B が同じ角振動数ωで振動することがある。設問(３)の運動方程式を解くことにより，このような振動が可能な単一の角振動数 ω をすべて求めよ。(ω^2の値を示すのみで良い)

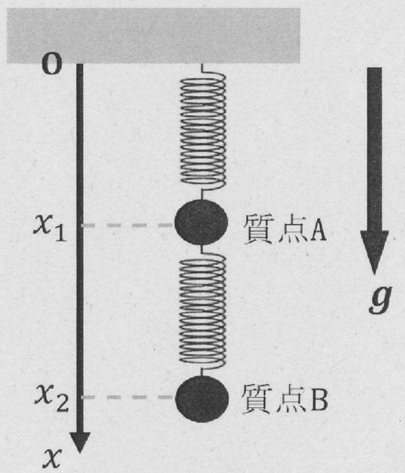


図３

問題 7　電磁気学（100 点）

以下の問い(**問 1**〜**問 4**)に答えよ。

問 1 静電ポテンシャルϕが以下の式（i）〜（iii）で与えられるとき，電場 E_x, E_y, E_zを求めよ。
ただし，$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$。また，$A$は定数である。

（i）　$\phi(x, y, z) = A(x^2 + y^2 + z^2)$

（ii）　$\phi(x, y, z) = A(xy + yz + zx)$

（iii）　$\phi(r) = A/r^3$

問 2 真空中で**図 1** のように中心 o，半径 aの導体球を内半径 b，外半径 c $(a < b < c)$の球殻の導体が囲んでいる。真空中での誘電率をε_0として，以下の設問(1)〜(4)に答えよ。解答用紙には途中計算も記せ。

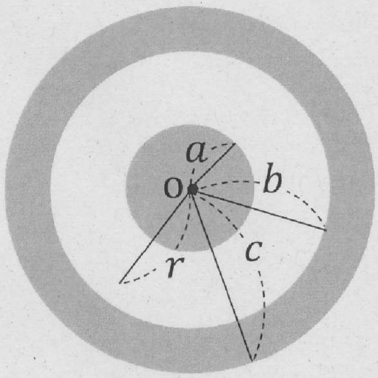


図 1

（1）外側の球殻のみに電荷Qを与えた場合，球殻の外側 $(r > c)$での電場$\boldsymbol{E}(r)$と無限遠を基準とした静電ポテンシャル $\phi(r)$を求めよ。

（2）（1）の場合，球と球殻間の半径 r $(a < r < b)$での電場 $\boldsymbol{E}(r)$と無限遠を基準とした静電ポテンシャル$\phi(r)$を求めよ。

（3）内側の球に電荷 Q_1，外側の球殻に電荷 Q_2を与えた場合，球と球殻間の半径 r $(a < r < b)$の電場 $\boldsymbol{E}(r)$を求めよ。

（4）（3）の場合，半径 r $(a < r < b)$での無限遠を基準とした静電ポテンシャル $\phi(r)$を求めよ。

問 3 次の文を読んで，設問(1)，(2)に答えよ。

図 2 のようにz軸に対して軸対称で時間と共に増加するz軸に平行な磁場を考える。また，z軸に垂直な面上で中心に原点oがある半径Rの円軌道上を電子が**図 2** のように運動しているとする。ここで，Rは定数である。

（1）電子が半径Rを保ったまま加速する条件を，半径Rの円の内部の磁束$\Phi(R, t)$と半径 Rにおける磁束密度$\boldsymbol{B}(R, t)$とRを用いて記述せよ。解答用紙には途中計算も記せ。

（2）条件(1)が成り立つとき半径 Rの磁束密度$\boldsymbol{B}(R, t)$は半径R内の面積で平均した磁束密度$\overline{\boldsymbol{B}}(R, t)$とどのような関係にあるか記述せよ。

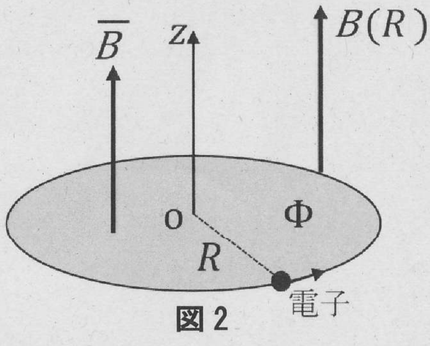


図 2

（次ページに続く）

問 4 次の文を読んで, 設問(1), (2)に答えよ。その際, 真空中の透磁率を μ_0 とせよ。また, 解答用紙には途中計算も記せ。

(1) **図 3** のように真空中の直線電流 I の一部 a から b の部分が点 o から距離 R 離れた点 P に作る磁場の強さ $B(\mathrm{P})$ を求めよ。このとき, 点 a, b を通る直線と点 P, a を通る直線のなす角 θ_a, 点 a, b を通る直線と点 P, b を通る直線のなす角 θ_b をそれぞれ**図 3** に示したように定義する。

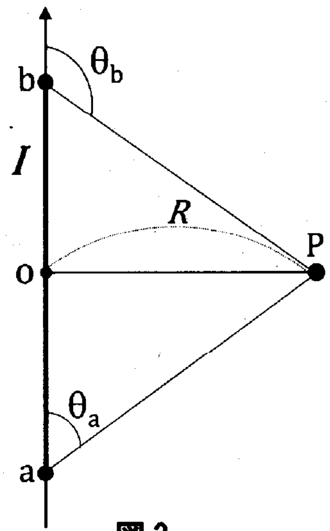


図 3

(2) 真空中で, **図 4** のように 1 辺の長さが s の正三角形の導線回路に定常電流 I が流れているとき, 正三角形の中心 o から面に垂直な距離 z の点 P での磁場の強さ $B(\mathrm{P})$ を求めよ。

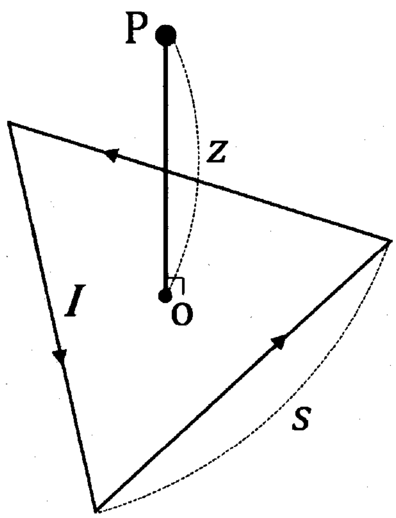


図 4

問題8　物理数学（100点）

以下の問い（**問1～問6**）に答えよ。解答用紙には計算の途中経過も書くこと。

問1　複素数の三角関数でも，正弦・余弦の加法定理が成り立つことを証明せよ。

問2　ベクトル演算子に関する以下の設問（1），（2）に答えよ。ここで，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$は直交座標系における$x, y, z$方向の単位ベクトルである。また，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$は定ベクトルで，$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ である。

（1）次の式を証明せよ。ただし，$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$である。

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{A}$$

（2）次の式を証明せよ。ただし，$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$である。

$$\mathrm{rot}[(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{B}] = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$$

問3　次の常微分方程式が完全微分形であることを示し，その一般解を求めよ。

$$\left(2x + \frac{1}{y}\right)dx + \left(2y - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

問4　次の行列Aがユニタリー行列であることを示せ。ただし，iは虚数単位である。

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & i\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -i\sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

問5　次の行列Aの固有値と規格化した固有ベクトルを求めよ。ただし，iは虚数単位である。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

問6　次の周期2πの関数$f(x)$をフーリエ級数で表せ。

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$$