問題８　物理数学（100 点）

以下の問い（問１～問４）に答えよ。解答用紙には計算の途中経過も書くこと。

問１　iを虚数単位とするとき，$z^2 - iz - 1 = 0$ を満たす複素数 zを極形式で表わせ。ただし，zの偏角 θの値の範囲を $0 \leq \theta < 2\pi$とする。

問２　正の整数 nに対して，(j,k)成分 a_{jk}が

$$a_{jk} = \begin{cases} 1 & (j+k = 2n+1) \\ 0 & (j+k \neq 2n+1) \end{cases}$$

で表わされる $2n \times 2n$行列（$2n$次の正方行列）

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を定義する。設問（１），設問（２）に答えよ。

（１）$n = 1$のとき，Aは 2×2行列で $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。Aの固有値を求めよ。

（２）$2n \times 2n$行列 Aの固有値を求めよ。

問３　$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$を x, y, z方向の単位ベクトルとする３次元直交座標系 (x,y,z)において，tをパラメタとして曲線 Cを $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$で表わす。$x(t), y(t), z(t)$は実関数で，以下の連立微分方程式にしたがう。設問（１），設問（２）に答えよ。

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = 4x(t) + y(t) & (1) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = -2x(t) + 2y(t) & (2) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = -z(t) & (3) \end{cases}$$

（１）$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$で表わされる点が曲線 C上にあるとき，この点における曲線 Cの接線ベクトルを求めよ。

（２）条件 $x(0) = 1$, $y(0) = -1$のもとで，式(1)と式(2)で構成されるような $x(t)$と $y(t)$に関する連立微分方程式を解け。

問４　次の周期 2πの関数 $f(x)$をフーリエ級数で表わせ。

$$f(x) = -x \quad (-\pi < x < \pi)$$