平成２２年度
九州大学大学院理学府
修士課程地球惑星科学専攻
入学試験問題

（全１７ページ）

（３００点）

注意事項

(1) この問題冊子には，合計９題が出題されている。

問題１　地質学	問題２　古環境学・古生物学	問題３　岩石学・鉱物学
問題４　一般化学	問題５　地球化学	問題６　熱力学
問題７　力学	問題８　電磁気学	問題９　物理数学

(2) 第１志望・第２志望ともに，岩石循環科学，地球進化史，古環境学，初期太陽系進化学，有機宇宙地球化学，無機生物圏地球化学，地球惑星物質科学，地球惑星博物学の各専門分野を志望する受験生は，９問題のなかから任意に３問題を選択すること。

(3) 第１志望または第２志望で，宇宙地球電磁気学，中層大気科学，対流圏科学，地球流体力学，固体地球惑星力学，地球内部ダイナミクス，観測地震・火山学の各専門分野を志望する受験生は，問題６～問題９（上記の下線を引いた問題）のなかから少なくとも２問題を含む，合計３問題を選択すること。下線を引いた問題以外から２問題以上選択した場合は，１問題のみを有効とし，他の解答問題は無効（０点）とするので注意すること。

(4) 解答はそれぞれ別の解答用紙の枠内に書くこと（裏面使用可）。

(5) それぞれの解答用紙には，受験番号，氏名，選択した問題の番号を記入すること。

(6) この問題冊子は持ち帰ってよい。

問題１　地質学　(100 点)

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１　以下の設問　（１）～　（７）に答えよ。

（１）図１のＡ~Ｉの時代名を日本語と英語で記せ。

（２）天文学者カール・セーガンは，初期地球では太陽輝度が低かったにもかかわらず地球が凍結しなかったことを，「暗い太陽のパラドックス」と名付けた。なぜ初期地球の表層は凍結しなかったのか説明せよ。

（３）Ａから原生代にかけて急激に酸素濃度が上昇したと言われている。その証拠となる岩石名を記し，その岩石の存在が酸素濃度の上昇を示す理由を説明せよ。

（４）超大陸パンゲアと同時期に存在した超海洋の名称を記せ。

（５）超大陸の形成と分裂は周期的に繰り返されると言われている。そのことを提唱した人の名前とおおよその周期を下記の語群から選び，記号で答えよ。

ア）Milankovitch，イ）Wilson，ウ）Matsuyama，エ）Bouma，オ）Naumann，

カ）1.8 万年，キ）4 万年，ク）100 万年，ケ）3000 万年，コ）4 億年，サ）10 億年

（６）アパラチア山脈は超大陸パンゲアの中央部に位置し，6000 km 以上連なっていた大山脈であった。この山脈の最終形成時期と，そのとき衝突した２つの大陸名を記せ。

（７）日本海が形成された時代は第三紀のどの時代か，地質年表から選べ。

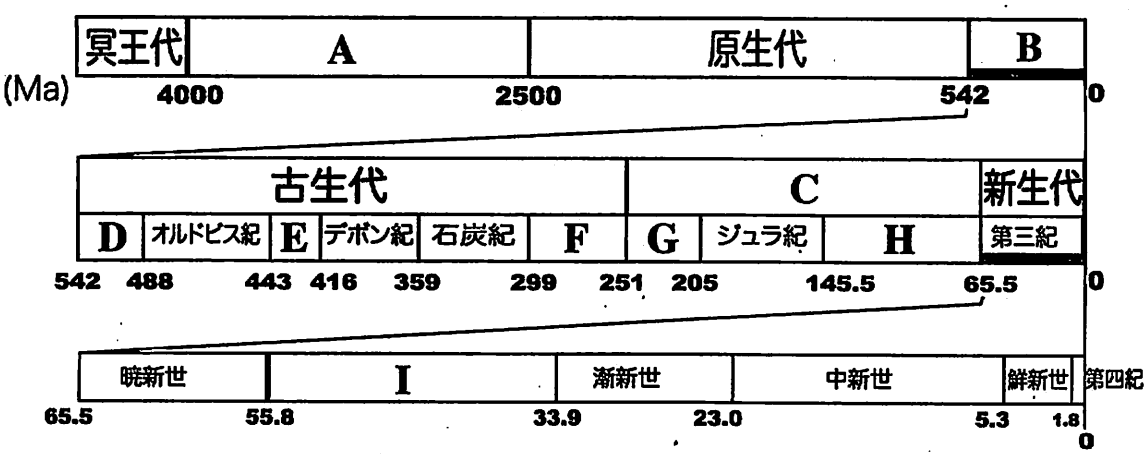


図１　地質年表　(Gradstein et al., 2004 の年代値を使用)

（次ページに続く）

（問題１の続き）

問 2　図 2 は海底扇状地の三次元図と堆積物の模式柱状図である。海底扇状地は陸上からの砕屑物が海底に運搬され堆積していく主要な場所であり，そこでは厚い堆積物が分布する。扇頂部では，海底谷から続く扇状地谷をつくり，下流に向かって海底チャンネルが続き，扇端部ではローブとよばれる舌状の堆積体を形成する。以下の設問（１）～（４）に答えよ。

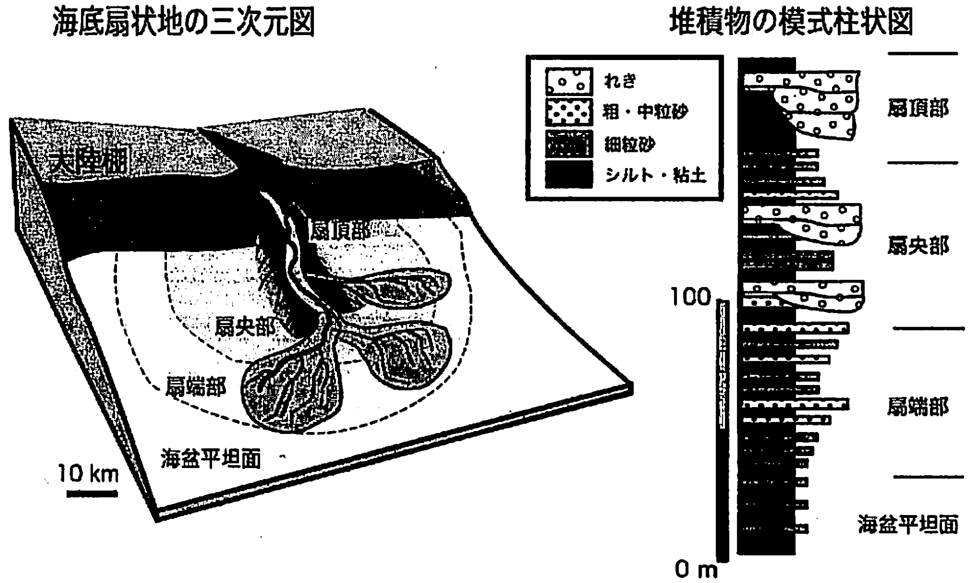


図 2　海底扇状地の三次元図と堆積物の模式柱状図

（１）海底扇状地において，堆積物を扇端部まで供給する流れで，最も適当なものを 1 つ選べ。

a）混濁(乱泥)流，b）土石流，c）サージ，d）ラハール，e）粒子流，f）底層流

（２）設問（１）の流れで形成される代表的な堆積物の名称を記し，その特徴を説明せよ。

（３）下記の文章で正しいものを選べ（複数選択可）。

（ア）扇頂部は流れが強いため砂が運ばれてしまい，シルトや粘土のみが卓越する。

（イ）扇頂部—扇央部では，チャンネルの外側にあふれ出した流れは氾濫原堆積物を作る。

（ウ）ローブはチャンネルの蛇行によりいろいろな方向に発達するため，扇形の形状を示す。

（エ）扇端部は流れが弱くなるため，粘土やシルトが主体の堆積物になる。

（オ）海底では陸上と違い，チャンネルの流路は蛇行しにくい。

（カ）最長の海底チャンネルはナイル川沖の地中海にあり，長さは約 200km に達する。

（キ）南海トラフの堆積物は，ほとんど天竜海底谷から供給されている。

（ク）黒部川扇状三角州から大量の土砂が日本海に流れ込み，日本海深部に達する長い海底チャンネルを形成している。

（４）模式柱状図から読み取られる岩相層序の特徴とその成因を述べよ。

問題２　古環境学・古生物学（100 点）

以下の問い（問１～問４）に答えよ。

問１　以下の語句（１）～（３）を簡単に説明せよ。

（１）化石の原地性，異地性

（２）生痕化石，体化石

（３）原核生物，真核生物

問２　白亜紀と古第三紀の境界で起こった大量絶滅について，以下の設問（１），（２）に答えよ。

（１）地球外原因説を支持する事象を２つ挙げよ。

（２）地球外原因説と矛盾する事象を２つ挙げよ。

問３　古生物学者が三葉虫のある種で３型を発見した。有性生殖を行う２倍体の生物の１つの形質に着目したとき，種内に Q 型，R 型，S 型の３つの表現型があり，３つの表現型は１組の対立遺伝子 (A, A') でコントロールされているとする。A の頻度を p，A'の頻度を q（ただし，$p + q = 1$）とするとき，以下の設問（１）～（３）に答えよ。

（１）１組の対立遺伝子 (A, A') を使って３つの表現型が現れる仕組みを簡単に説明せよ。

（２）今，個体の出入りがない十分に大きな集団があり，交配は全くランダムに起こり，A, A'間には適応値に差がないとする。この集団から任意に 500 個体を採集したところ，Q 型は 80 個体で，残りの 420 個体は R 型と S 型であった。Q 型と S 型を同型接合体とするとき，期待される R 型と S 型の個体数を求めよ。途中の式も書くこと。

（３）対立遺伝子 (A, A')の頻度と表現型（Q 型，R 型，S 型）の頻度との間に一定の均衡が保たれる現象は何と呼ばれるか。以下の語群(a)～(e)から最も適当なものを選び，記号で答えよ。

語群　(a) メンデルの法則　(b) ハーディ・ワインベルグの法則　(c) 塩基の相補性　(d) 独立の法則　(e) 自然淘汰説

（次ページに続く）

(問題２の続き)

問４　図１は伊勢湾湾口で採集されたヒヨクガイ *Cryptopecten vesiculosus* (Dunker, 1877)で，放射肋の相対的な高さ(100W／H)のヒストグラム（頻度分布図）に２型が見られることを示している。以下の設問（１）～（３）に答えよ。ただし，W は肋の高さ，H は殻の高さを表す。

（１）２名法とは何か。ヒヨクガイの学名を使って説明せよ。

（２）化石の集団標本に遺伝学的（生物学的）種の定義を当てはめるときに注意すべき点を２つ挙げよ。

（３）ヒストグラムに２つの山が現れる原因として，同種内の多型（２型）のほかに２種の混合が考えられる。２種の混合の可能性を検討する方法を 120 字程度で説明せよ。

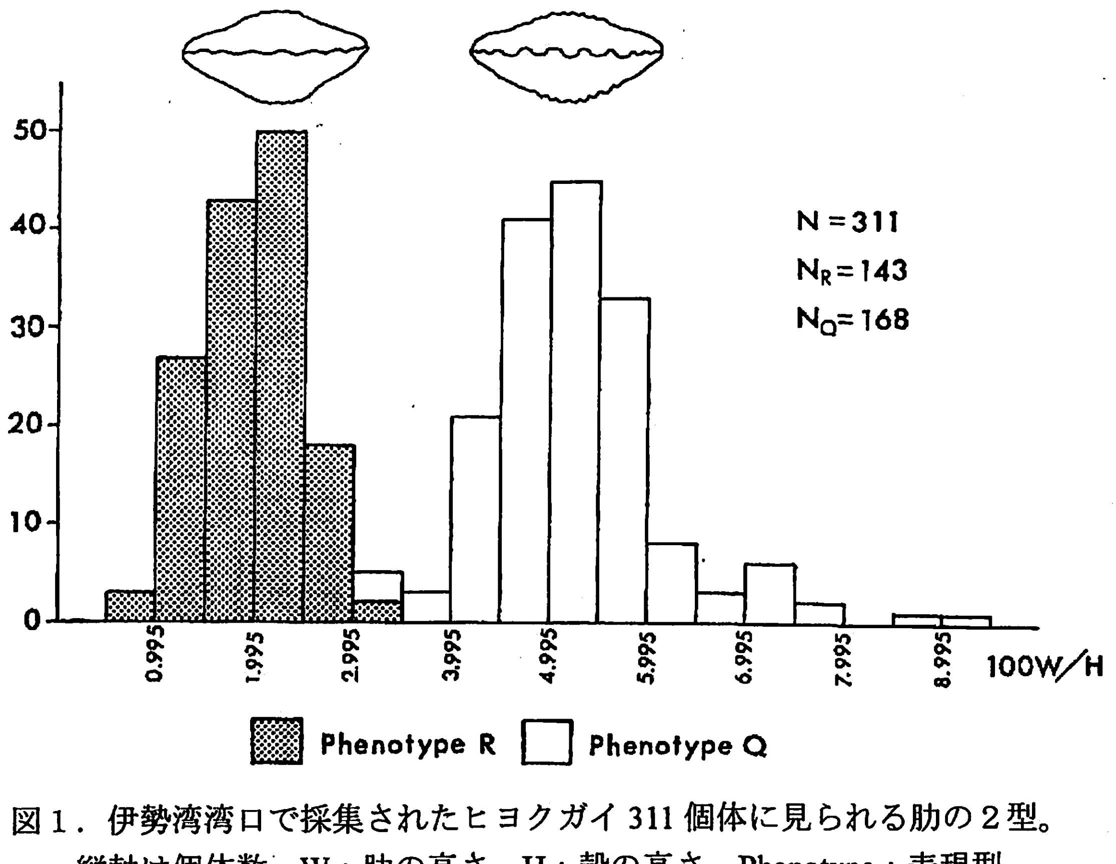


図１．伊勢湾湾口で採集されたヒヨクガイ 311 個体に見られる肋の２型。縦軸は個体数。W：肋の高さ，H：殻の高さ，Phenotype：表現型，N：標本総数，N_R：R 型の個体数，N_Q：Q 型の個体数。(Hayami, 1984)

問題３　岩石学・鉱物学（１００点）

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１　SiO_2の相転移に関する次の文を読んで，以下の設問（1）－（5）に答えよ。

地殻の主要構成物質であるSiO_2結晶は，温度や圧力が変化することで相転移を起こし様々な（　A　）が存在する。常温常圧下では低温型石英が安定であるが，(a)１気圧下において温度が上昇するにつれて 577℃において高温型石英に，867℃においてトリディマイトに，さらに1470℃においてクリストバライトに相転移する。また圧力の上昇にともない，約 3 GPa において（　B　），約 10 GPa においてスティショバイトに相転移する。さらに鉱物名はついていないが，地球下部マントル条件に相当する約 50 GPa において塩化カルシウム型構造，約 100 GPa においてα－酸化鉛型構造に相転移し，ガス惑星内部の条件に相当する約 270 GPa においてパイライト型構造へ相転移することが明らかになっている。

このような相転移は熱力学および結晶構造の観点から幾つかのタイプに分類される。例えば低温型石英から高温型石英の相転移では，原子拡散をともなわず Si と O からなる四面体間の結合角が少し変化することにより（　C　）晶系から六方晶系へと対称性が（　D　）くなる。このような相転移を（　E　）型の相転移という。一方，石英からトリディマイトおよびクリストバライトへの相転移では四面体間の結合が切れて再配列する。また石英からスティショバイトの相転移では Si-O 結合の切断をともない，Si の配位数が（　F　）から（　G　）に増加して新しく八面体を基本単位とする結晶構造へと変化する。これらの相転移は（　H　）型の相転移と呼ぶ。また(b)熱力学的な立場から分類すれば，石英からスティショバイトへの変化は一次の相転移であるが，スティショバイトから塩化カルシウム型構造への変化は二次またはそれ以上の相転移であることが知られている。

（1）　文中の（　A　）－（　H　）に入る最も適当な数または語句を答えよ。

（2）　下線(a)について，石英，トリディマイト，クリストバライトの３つの鉱物における温度変化によるギブスの自由エネルギー変化の関係を模式的な図として示せ。なお横軸を温度，縦軸を自由エネルギーとし，石英は低温型と高温型に区別しなくてよい。

（3）　下線(b)について，一次の相転移と二次の相転移の違いを熱力学的な立場から説明せよ。

（4）　トリディマイトやクリストバライト，（　B　），スティショバイトは火成岩や高圧変成作用を受けた岩石，隕石孔などで発見される場合があるが，高温型石英を地表で見つけることは難しい。その理由を述べよ。

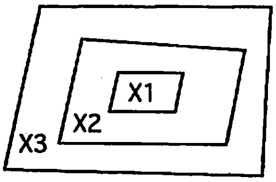
（5）　低温型石英の密度は 2.65 g cm^{-3} である。一方でパイライト型SiO_2は立方晶系で格子定数 a は 0.393 nm，Z は 4 である。低温型石英からパイライト型SiO_2に相転移したときに密度が何倍になるか計算せよ。なお Si と O の原子量はそれぞれ 28.1 と 16.0，アボガドロ定数は 6.02×10^{23} mol^{-1} とし，計算の過程を含めて有効数字２桁で解答せよ。温度圧力変化にともなう密度変化は無視してよい。

（次ページに続く）

問２　固溶体に関する以下の設問（１）－（３）に答えよ。

（１）マントルが溶融して化学的分化が起こる簡単な例として，かんらん石固溶体の部分融解を考えよう。マントルのかんらん石固溶体が部分融解して生じるメルトの Fe/Mg 比は，共存する固相と異なることが知られている。フォルステライト-ファイヤライト２成分系の模式的な相平衡図を用いて，部分融解したときに固相とメルトで Fe/Mg 比がどのように異なるか説明せよ。ただし平衡結晶作用を仮定せよ。

（２）マグマから結晶化した斜長石は組成累帯構造をもつことが多く，それは火成岩形成時の温度や圧力，化学的環境の変化を知る手掛かりとなる。その簡単な例として，右図のような斜長石の組成累帯構造を考えてみよう。アルバイト-アノーサイト２成分系の模式的な相平衡図を用いて，このような組成累帯構造が形成されるプロセスについて説明せよ。ただし，温度変化のみによって結晶化が進行するものとする。



組成累帯構造をもつ斜長石結晶の模式図（X1, X2, X3はアルバイト成分濃度を表す）。X1 ＜ X2 ＜ X3の順でアルバイト成分が増加する。

（３）火成岩において組成累帯構造が発達した斜長石はよく見られるが，組成累帯構造を持つかんらん石の存在はまれである。その理由について説明せよ。ただし，かんらん石はフォルステライト-ファイヤライト２成分系，斜長石はアルバイト-アノーサイト２成分系であるとして議論して構わない。

問題4　一般化学　（１００点）

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１　水素化リチウム（LiH）は，室温ではNaCl型の結晶をつくり，空気が乾燥していれば安定である。図１は，LiH が安定であることを分子軌道法に基づいて考察するために，リチウム（Li）と水素（H）の原子軌道，および水素化リチウム（LiH）の分子軌道のエネルギー準位（単位 eV）を示したものである。

この図を参考にして，以下の設問（１）～（７）に答えよ。

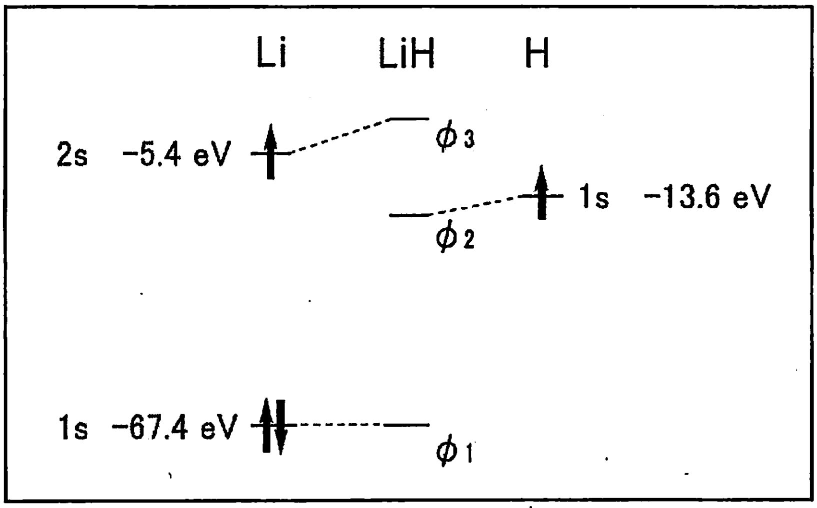


図１　LiH の分子軌道のエネルギー準位（友田，2007 を改）

（１）図１によれば，Li 原子の 1s 軌道のエネルギー準位は －67.4 eV，H 原子の 1s 軌道のエネルギー準位は －13.6 eV と，両者の値は大きく異なっている。その理由を 50字以内で述べよ。

（２）LiH において形成される分子軌道について以下のように考察できる。Li 原子の 1s 軌道は H 原子の 1s 軌道とほとんど相互作用せず，そのまま分子軌道 ϕ_1 になる。また，Li 原子 2s 軌道は H 原子の 1s 軌道と相互作用して，結合性軌道 ϕ_2 と反結合性軌道 ϕ_3 を形成する。図２は，これらの分子軌道を図示したものである（左が Li 原子，右が H 原子）。

(a), (b), (c) のいずれが ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3 に相当するかを記せ。

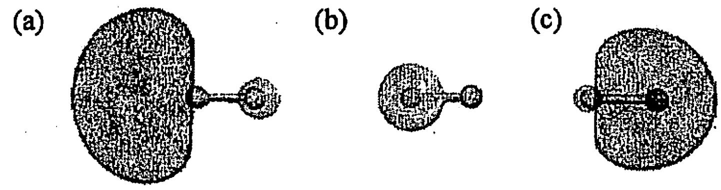


図２　LiH の分子軌道（友田，2007 を改）

（３）基底状態の LiH において，電子は ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3 にどのように配置されるかを記せ。

（４）設問（３）の電子配置に基づいて LiH が安定であることを説明せよ。

（次ページに続く）

（５）LiH のイオン結晶において，陽イオンになっているのはどちらか。X^+イオンのように答えよ。また，そのように考えた理由を記せ。

（６）LiH のイオン結晶において，イオン半径が大きいのはどちらか。X^+イオン（あるいはY^-イオン）のように答えよ。また，そのように考えた理由を記せ。

（７）LiH を水に投じると激しく反応して水素を発生する。この化学反応式を記せ。

問２　二酸化炭素（CO_2）が水に溶けてできる炭酸（H_2CO_3）は，(1)式のように解離して酸としてはたらく。また，二酸化イオウ（SO_2）は，(2)式のように水に溶けて亜硫酸（H_2SO_3）となり，水溶液中で(3)式のように解離して酸としてはたらく。この問題では，HCO_3^- と HSO_3^- の解離は無視できるものとする。

以下の反応式ならびに平衡定数をもとに，設問（１）～（４）に答えよ。

$$H_2CO_3 = H^+ + HCO_3^- \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$SO_2 + H_2O = H_2SO_3 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$H_2SO_3 = H^+ + HSO_3^- \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

反応(1)の平衡定数（H_2CO_3 の解離定数）は 25℃において $K_C = 4.5 \times 10^{-7}$ mol kg^{-1} である。
反応(2)の平衡定数（SO_2 のヘンリー定数）は 25℃において $K_H = 1.0$ mol kg^{-1} atm^{-1} である。
反応(3)の平衡定数（H_2SO_3 の解離定数）は 25℃において $K_S = 1.8 \times 10^{-2}$ mol kg^{-1} である。

（１）浅い池の水のように大気と接している陸水中の H_2CO_3 濃度は，一般に大気中の CO_2 濃度と平衡にある。現在の大気中の CO_2 濃度と 25℃で平衡にある陸水中の H_2CO_3 濃度は，1.3×10^{-5} mol kg^{-1} である。池の水に他の物質が溶解していないとすると，H_2CO_3 の解離によって池の水の pH は以下の(a)～(f)のどの範囲になるか。解答には計算の過程も合わせて記すこと。

(a) $1 \leqq pH < 2$　(b) $2 \leqq pH < 3$　(c) $3 \leqq pH < 4$　(d) $4 \leqq pH < 5$　(e) $5 \leqq pH < 6$　(f) $6 \leqq pH < 7$

（２）活発な火山の周辺では空気中の SO_2 濃度が高く，池の水には H_2CO_3 に加えて H_2SO_3 も溶解すると考えられる。空気中の SO_2 濃度が 20 ppm（体積比）に達している時に，この池の水の H_2SO_3 濃度を計算によって求めよ。ただし，空気中の SO_2 濃度と 25℃で平衡にあるとする。

（３）設問（２）で考えた池の水の pH と，設問（１）で考えた池の水の pH は，どちらが低いか。そのように考えた理由とともに記せ。

（４）設問（２）で考えた池の水の pH は以下の(a)～(f)のどの範囲になるか。解答には計算の過程も合わせて記すこと。

(a) $1 \leqq pH < 2$　(b) $2 \leqq pH < 3$　(c) $3 \leqq pH < 4$　(d) $4 \leqq pH < 5$　(e) $5 \leqq pH < 6$　(f) $6 \leqq pH < 7$

問題５　地球化学（１００点）

以下の問い（問１〜問３）に答えよ。

問１　図１は太陽系の元素存在度について表したものである。図１を参考にして，以下の設問（１）〜（３）に答えよ。

（１）　図１の太陽系の元素存在度は，ある元素を 10^6 個に規格化した相対存在度で表されている。その元素の元素記号と英語名を記せ。

（２）　陽系の元素存在度は２つの手法（図１中の A と B）による測定結果に基づいて決定される。A と B の２つの手法について，それぞれ 20 字程度で説明せよ。

（３）　設問（２）の２つの手法によって測定された元素存在度は多くの元素についてよく一致するが，図１中の a，b のように一致しない元素もある。a，b の一致しない理由をそれぞれ説明し，対応する元素を一つずつ記せ。

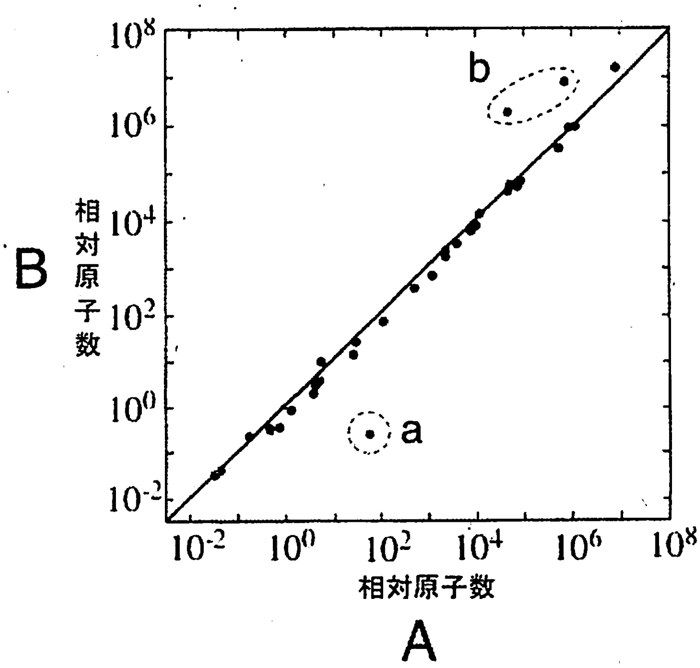


図１　（松尾編，1989 を改）

（次ページに続く）

問２　酸素の安定同位体比について，以下の設問（１）～（５）に答えよ。

（１）　酸素の安定同位体比の表記に用いられる $\delta^{18}O$ の定義を記せ。

（２）　$\delta^{18}O$ の同位体比の国際標準物質は２つある。それぞれについて 20 字程度で説明せよ。

（３）　液体の水 $H_2O(l)$ と水蒸気 $H_2O(g)$ が 20°C において同位体平衡にある。そのとき，$H_2O(l)$ の$\delta^{18}O$ は 0 ‰，$H_2O(g)$ の$\delta^{18}O$ は -9 ‰であった。20°C における $H_2O(g)$ の $H_2O(l)$ に対する同位体分別係数 $\alpha_{g\text{-}l}$ を求めよ。

（４）　現在の地球表層の水圏・雪氷圏において，最も同位体的に軽い（最も小さな$\delta^{18}O$ 値をもつ）H_2O はどこに存在するか。また，その最も同位体的に軽い H_2O がどのように生じるかについて説明せよ。

（５）　図２はカリブ海の柱状堆積物中の過去約 75 万年間における浮遊性有孔虫化石の$\delta^{18}O$ の変動である。この$\delta^{18}O$ が変動するメカニズムを説明せよ。

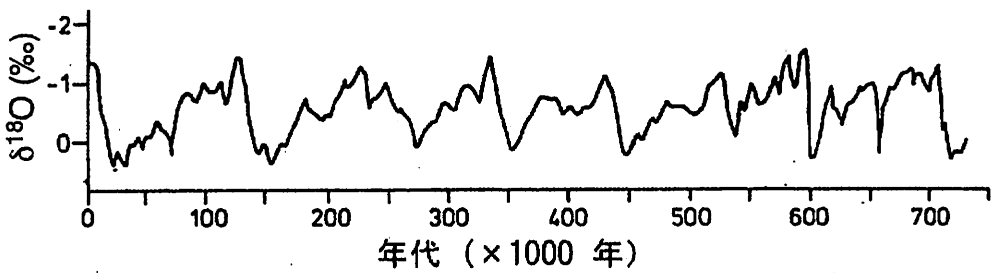


図２（Hoefs, 1987 を改）

問３　放射性核種 ^{87}Rb による年代測定について，以下の設問（１）～（３）に答えよ。

（１）^{87}Rb は半減期 4.88×10^{10} 年で ^{87}Sr に壊変する。この放射壊変の様式を記せ。

（２）設問（１）の放射壊変における壊変定数 λ を有効数字３桁で求めよ。ただし，必要ならば，$\ln 2 = 0.693, \ln 3 = 1.10, \ln 5 = 1.61, \ln 7 = 1.95$ を用いよ。

（３）設問（１）の放射壊変を用いて，ある岩石のアイソクロン年代を求めたい。岩石中に含まれる同時に生成した鉱物である斜長石(P)，カリ長石(K)，黒雲母(B)の $^{87}Rb/^{86}Sr$ と $^{87}Sr/^{86}Sr$ 値をそれぞれ，$(^{87}Rb/^{86}Sr)_P$ と $(^{87}Sr/^{86}Sr)_P$，$(^{87}Rb/^{86}Sr)_K$ と $(^{87}Sr/^{86}Sr)_K$，$(^{87}Rb/^{86}Sr)_B$ と $(^{87}Sr/^{86}Sr)_B$ にするとき，アイソクロン年代の求め方を図示しながら説明せよ。

問題6　熱力学（１００点）

以下の問い(問１，問２）に答えよ。

問１　１モルの単原子よりなる理想気体に対して，準静的過程によって，体積Vと圧力Pを図１の閉じた経路（A→B→C→D→A）に従って変化させた。以下の設問(1)〜(5)に答えよ。

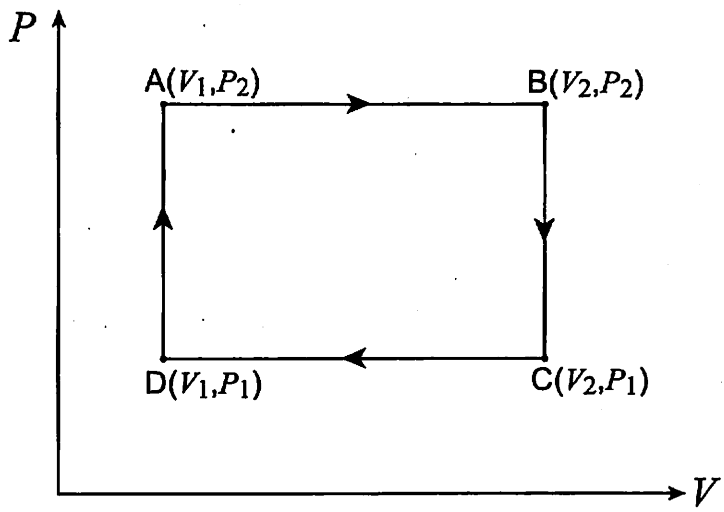


図１

(1) この経路の全行程の結果，この気体がその外に対して行った仕事Wは，図１の経路で囲まれた面積に等しいことを示せ。

(2) A→B及びB→Cの変化によって気体に外から入ってきた熱量をそれぞれ求めよ。ただし，解答は図１に示してある変数を用いて表せ。

(3) この経路の全行程の前後で，気体に外から入ってきた熱量Qを計算し，設問(1)の結果と合わせて，気体の内部エネルギーは変化しないことを確認せよ。

(4) A→B，B→C，C→D，D→Aの各過程でのエントロピー変化を計算し，この経路の全行程の前後で，気体のエントロピーは変化しないことを確認せよ。

(5) 状態Aから状態Cへ一つの準静的断熱過程で変化させることができる場合を考える。その断熱過程において体積Vと圧力Pが満たすべき関係式を導け。ただし，定圧比熱C_Pと定積比熱C_Vの比をγとせよ。

(次ページに続く)

問2　熱力学における変数に関して以下の設問 (1)〜(5) に答えよ。

(1) 次の6個の変数が示強変数であるか示量変数であるか答えよ。

温度　　体積　　圧力　　エントロピー　　化学ポテンシャル　　分子数

(2) 上の変数の間には，2つの変数の積がエネルギーの単位になる組み合わせが存在する。そのような組み合わせをすべて記せ。

(3) ある温度・圧力の下で安定平衡な状態にある系において，分子数が変化した場合，それに伴い系の化学ポテンシャルも変化し，その結果，系が安定平衡であるべき温度と圧力も変化する。しかし，それらの変化は独立ではない。化学ポテンシャル，温度，圧力の微小変化量をそれぞれ $d\mu$，dT，dP としたときに，これらの間で成り立つ関係式を求めよ。

(4) 次の関係式が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -1$$

(5) 設問 (4) を参考にして，分子数及び体積一定の条件下で温度変化に伴う圧力変化を熱膨張率 α および等温圧縮率 κ を用いて表せ。

問題 7　力学（100 点）

以下の問い（問 1〜問 4）に答えよ。

問 1　質点 P の x, y 座標が時間 t の関数として $x=a\cos(\omega t)$, $y=b\sin(\omega t)$ で与えられる時，加速度は $(x, y)=(0, 0)$ を向くことを示せ。ただし，a, b, ω は正の定数とする。

問 2　あるバネ定数を持ったバネに質量 m のおもりをつけ，おもりを手で支えながら下げていって静かにはなす時，バネは a だけ伸びてつりあった。この状態からさらに b だけ引き伸ばして静かにはなした時，おもりはどんな運動をするか。微分方程式を解くことにより解答せよ。その際，a だけ伸びてつりあった状態のおもりの位置を $x=0$ として，鉛直下方を x 軸の正の向きにとり，重力加速度の大きさは g とする。

問 3　質量 M, 半径 a の円板の，円板の中心を通り円板に垂直な軸の周りの慣性モーメントを求めよ。ただし，円板内の単位面積あたりの質量は一定とする。

問 4　太陽の質量を M, 惑星の質量を m とし，万有引力による惑星の運動を調べよう。万有引力は中心力で惑星の運動は一平面内に限られるので，太陽を原点に固定し極座標 (r, θ) を用いる。万有引力による位置エネルギーを $U=-G\dfrac{Mm}{r}$ として，以下の設問 (a)〜(d) に答えよ。G は万有引力定数である。ただし，$M >> m$ とし，太陽は動かないとする。

(a) 力学的エネルギーを E として、この運動に伴う力学的エネルギー保存の法則は

$$\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]-G\frac{Mm}{r}=E \qquad (1)$$

で与えられることを示せ。

(b) 角運動量は保存されることを示せ。

（次ページに続く）

(c) 角運動量保存の法則は

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=h \qquad (2)$$

で与えられることを示せ。ただし，h は定数とする。

(d) 惑星の軌道を求めるために，上式(1)と(2)より dt を消去する。その時， r と θ の関係は

$$\frac{\pm h}{r^2 f(r)}dr=d\theta \qquad (3)$$

で与えられる。式(3)の $f(r)$ を求めよ。

問題8　電磁気学（100点）

以下の問い（**問1～問4**）に答えよ。解答用紙には解答に至る計算過程も記せ。

問1　磁束密度 $B = 1.0 \times 10^{-7}$ [T] の一様磁場中で，陽子が半径 $a = 1.0 \times 10^{5}$ [m] のサイクロトロン運動をしている。このとき，以下の設問 (1), (2) に答えよ。

(1) この陽子の速さを B, a, m, e を用いて表せ。ただし，m は陽子の質量，e は陽子の電荷を表す。

(2) この陽子の速さの値を求めよ。ただし，$m = 1.7 \times 10^{-27}$ [kg]，$e = 1.6 \times 10^{-19}$ [C] とせよ。

問2　半径 a，長さ L の円柱がある。この円柱の両端間に直流電流 J を流す。両端間の電気抵抗を R とする。この a，L，J，R のうち必要なものを用いて，以下の設問 (1)～(5) に答えよ。

(1) この円柱の表面に生じる電場 $\mathbf{E}$ の大きさを求めよ。

(2) この円柱の表面に生じる磁場の強さ $\mathbf{H}$ の大きさを求めよ。

(3) この円柱の表面におけるポインティングベクトル $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ は外向きか内向きか，理由をつけて記せ。

(4) この円柱の表面におけるポインティングベクトル $\mathbf{S}$ の大きさを求めよ。

(5) 設問(4)で求めた関係式を用いて，この円柱の表面を単位時間当たりに通過する電磁エネルギーの総和を求めよ。

問3　静電容量 C の平行板コンデンサーに交流電源をつなぐ。交流電源の電圧が $V = V_0 \cos(\omega t)$ （t は時間，V_0 と ω は定数）であるとき，コンデンサー内に生じる変位電流の大きさを求めよ。ただし変位電流密度はコンデンサー内部で一様とする。

問4　電場 $\mathbf{E}$ をスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用いてあらわせ。

問題9　物理数学 (100点)

以下の問い (問1，問2) に答えよ。解答はいずれも答に至る過程を明記すること。

問1　フーリエ変換に関係する以下の問い (1)〜(4) に答えよ。

(1) x の関数 $g(x)$ のフーリエ変換 $G(f)$ は

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi f x} dx$$

と書ける。ここで f，i，π はそれぞれ周波数，虚数単位，円周率である。このときフーリエ逆変換の式はどのように書けるか。

(2) $g(0) = 1$ のとき，

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, df = 1$$

となることを示せ。

(3) 次の関数

$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq x_0, \\ 0, & |x| > x_0 \end{cases}$$

をフーリエ変換するとき，

$$G(f) = 2x_0 \frac{\sin(2\pi f x_0)}{2\pi f x_0}$$

となることを証明せよ。ただし $x_0 > 0$ とする。

(4) 定積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

を求めよ。

(次ページに続く)

問 2　行列に関係する以下の問い (1)〜(4) に答えよ。

(1) 2 行 2 列の行列を A とする。さらにその固有値を λ_1, λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) とし，それぞれに付随する固有ベクトルを $(x_1,\ y_1)$ と $(x_2,\ y_2)$ とする。

$$P \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

と置くと，固有値と固有ベクトルの定義から

$$A\,P = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

と書ける。ここから，

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

および

$$A^n = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1}$$

となることを示せ。ここで P^{-1} は P の逆行列，n は正の整数，A^n は行列 A の n 乗を示す。

(2) 固有値が 1 と -1 である 2 行 2 列の行列 B がある。この行列の n 乗 B^n を求めよ。さらにその逆行列 $(B^n)^{-1}$ を求めよ。B^n と $(B^n)^{-1}$ の両方において，n が偶数と奇数で答が異なるので，両者を区別して答を示せ。必要なら 2 つの正則な正方行列 B_1, B_2 の積の逆行列が

$$(B_1\,B_2)^{-1} = B_2^{-1}\,B_1^{-1}$$

となることを使え。

(3) 固有値が 1 と -1 で，それぞれに付随する固有ベクトルが (2, 1) と (1, 1) である 2 行 2 列の行列 C を求めよ。

(4) x と y を未知数とする次の連立方程式

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{21}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

を解け。ここで

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{21}$$

は行列

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

の 21 乗を表す。