

問題9 物理数学 (100点)

以下の問い (問1~問5) に答えよ。

問1 2次の多項式 $g(x)$ を

$$g(x) = g_2x^2 + g_1x + g_0$$

とする。ここで、 g_0, g_1, g_2 は定数である。このとき、2次以下の多項式 $f(x)$ で微分方程式

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{df}{dx} + f = g$$

を満たすものを求めよ。

問2 3次元直交座標系 (x, y, z) を考え、その基本ベクトルを i, j, k とする。2つのベクトル場 $u = zi + xj + yk, v = xyi + yzj + zxk$ について以下の (1), (2) を計算せよ。

(1) $\nabla \cdot (u \times v)$

(2) $u \times (\nabla \times v)$

問3 次の方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} + 4y = e^{3x}$$

問4 1周期が

$$f(x) = x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

で定義される周期関数 $f(x)$ をフーリエ級数に展開して、公式

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

を導け。

問5 以下の実対称行列 A について、逆行列 A^{-1} の固有値と規格化した固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$