平成２５年度
九州大学大学院理学府
修士課程地球惑星科学専攻
入学試験問題

（全１７ページ）

（２００点）

注意事項

(1) この問題冊子には，合計９題が出題されている。

問題１　地質学	問題２　古環境学・古生物学	問題３　岩石学・鉱物学
問題４　一般化学	問題５　地球化学	問題６　熱力学
問題７　力学	問題８　電磁気学	問題９　物理数学

(2) 第１志望・第２志望ともに，岩石循環科学，地球進化史，古環境学，惑星系形成進化学，有機宇宙地球化学，無機生物圏地球化学，地球惑星物質科学，地球惑星博物学の各専門分野を志望する受験生は，９問題のなかから任意に２問題を選択すること。

(3) 第１志望または第２志望で，太陽地球系物理学，宇宙地球電磁気学，中層大気科学，対流圏科学・地球流体力学，固体地球惑星力学，地球内部ダイナミクス，観測地震・火山学の各専門分野を志望する受験生は，問題６～問題９（上記の下線を引いた問題）のなかから少なくとも１問題を含む，合計２問題を選択すること。下線を引いた問題以外から２問題を選択した場合は，１問題のみを有効とするので注意すること。

(4) 解答はそれぞれ別の解答用紙の枠内に書くこと（裏面使用可）。

(5) それぞれの解答用紙には，受験番号，氏名，選択した問題の番号を記入すること。

(6) この問題冊子は持ち帰ってよい。

問題１　地質学（100 点）

以下の問い（問１～問４）に答えよ。

問１　石灰岩の分類に関する次の文章を読み，設問（1）～（3）に答えよ。

石灰岩の分類には，Folk (1962)の分類法と Dunham (1962)の分類法が現在広く用いられている。前者は，スパライト質セメントあるいは（　ア　）からなるグラウンドマスの性質と構成粒子の種類に基づくもので，それらを組み合わせて分類を行う。後者は，粒子組織が（　イ　）であるか (a) 粒子支持組織であるかに着目した分類法で，石灰岩の堆積場のエネルギー状態をある程度反映する。たとえば，(b) イントラクラストに富み，スパライト質セメントをもつ石灰岩に前者と後者の分類法を適用すると，それぞれ（　ウ　），（　エ　）と分類・命名できる。

（1）上の文中の空所（　ア　）～（　エ　）に最もよくあてはまる用語を次の語群から選んで，記号で答えよ。

A. 等粒状組織，　B. intramicrite，　C. 基質，　D. アラゴナイト，
E. intrasparite，　F. 基質支持組織，　G. 有機物，　H. ドロマイト，
I. intraclastic lime-mudstone，　J. intraclastic grainstone

（2）下線部（a）の用語を説明せよ。解答には図を用いてもよい。

（3）下線部（b）の用語を説明せよ。解答には図を用いてもよい。

問２　堆積岩の層理面に関する次の文章を読み，設問（1）～（2）に答えよ。

一般に層理面の走向とは，層理面と（　ア　）がなす交線の方位のことである。両者が互いに交わらない（　イ　）の走向は定義されない。傾斜は層理面の傾きを表すもので，傾きの（　ウ　）と方向で表される。傾斜の方向は走向に直交する。たとえば，ある地層の層理面の走向が N45°E であった場合，傾斜方向として（　エ　）と（　オ　）がある。

（1）堆積岩の層理面とは何かを説明せよ。

（2）上の文中の空所（　ア　）～（　オ　）に最もよくあてはまる用語を下の語群から選んで，記号で答えよ。

A. 南西方向，　B. 大きさ，　C. 水平層，　D. 変位量，　E. 南東方向，
F. 垂直層，　G. 現在の水平面，　H. 褶曲層，　I. 片理面，
J. 現在の鉛直面，　K. 北東方向，　L. 断層面，　M. 北西方向

（　次ページに続く　）

問３　下の用語（１），（２）について解説せよ。解答には図を用いてもよい。

（１）フルートキャスト（flute cast）

（２）自然堤防（natural levee）

問４　堆積岩の生成に関する次の文章を読んで，設問（１）～（３）に答えよ。

風化作用は地表付近で進行する現象で，岩石を破壊し，（ ア ）を減少させる作用をもつ（ イ ）と，岩石の構成鉱物種や化学組成を変化させる作用をもつ（ ウ ）の２つに分けられる。これら２つの作用は相伴って互いの進行を促進させる。しかし両者が一様に進行するわけではなく，気候条件と造構運動に規制されて，進行の程度に差が生じる。たとえば，液相の水が乏しい寒冷気候地域では，（ ウ ）よりも（ イ ）が卓越する。（ ウ ）が最も典型的に進行するのは湿潤気候地域であるが，地形が（ エ ）で，造構運動が活発なところでは，風化の速度に比べて（ オ ）の速度が大きいため厚い風化殻は形成されない。熱帯～亜熱帯気候で雨量が多く，かつ地下水の循環が活発な環境では，可溶性成分の（ カ ）が著しく，Al，Fe，Ti，Si など（ カ ）しにくい成分だけが地表部に濃縮する。その一例として，熱帯～亜熱帯気候帯の多雨地域で Al 以外のほとんどの成分が（ カ ）して形成される（ キ ）がある。（ キ ）は当時の気候を復元するのに役立つ。

一方，堆積直後の海成堆積物は一般に多量の（ ク ）を含み，軟らかい。これに対して砂岩や泥岩は，(a) <u>未固結の砂や泥</u>に比べて（ ケ ）が高く，硬い。両者の物理的性質や堆積岩石学的特徴には明瞭な差が認められ，堆積物は地下深部への埋没，時間の経過とともに，その性質が変化していくことがわかる。この変化には，圧密，膠結，再結晶，溶解，自生などのさまざまな作用が含まれるが，それらは一括して（ コ ）とよばれる。

（１）文中の空所（ ア ）～（ コ ）に最もよくあてはまる用語を下の語群から選んで，その記号を答えよ。

A. 急峻，　B. 乾燥気候地域，　C. ラテライト，　D. 空隙率，
E. 平坦，　F. 化学的風化，　G. 堆積，　H. 粒径，　I. 侵食，
J. 機械的（物理的）風化，　K. 海底風化，　L. 続成作用，　M. 溶脱，
N. 変成作用，　O. 密度，　P. ボーキサイト，　Q. 水

（２）（ キ ）のほかに，古気候推定に役立つ堆積物の例を１つあげ，それがどのような気候条件を反映しているかを述べよ。

（３）下線部（ａ）について，未固結堆積物の変形構造の例を１つあげよ。

問題２　　古環境学・古生物学（100 点）

以下の問い（**問１～問３**）に答えよ。

問１　古環境学に関する以下の事項を，それぞれ 50 字程度で説明せよ。

（１）Younger Dryas

（２）Milankovitch Cycles

（３）Dansgaard-Oeschger Events

（４）Heinrich Events

問２　古生物学に関する以下の事項を，それぞれ 50 字程度で説明せよ。

（１）印象化石

（２）生痕化石

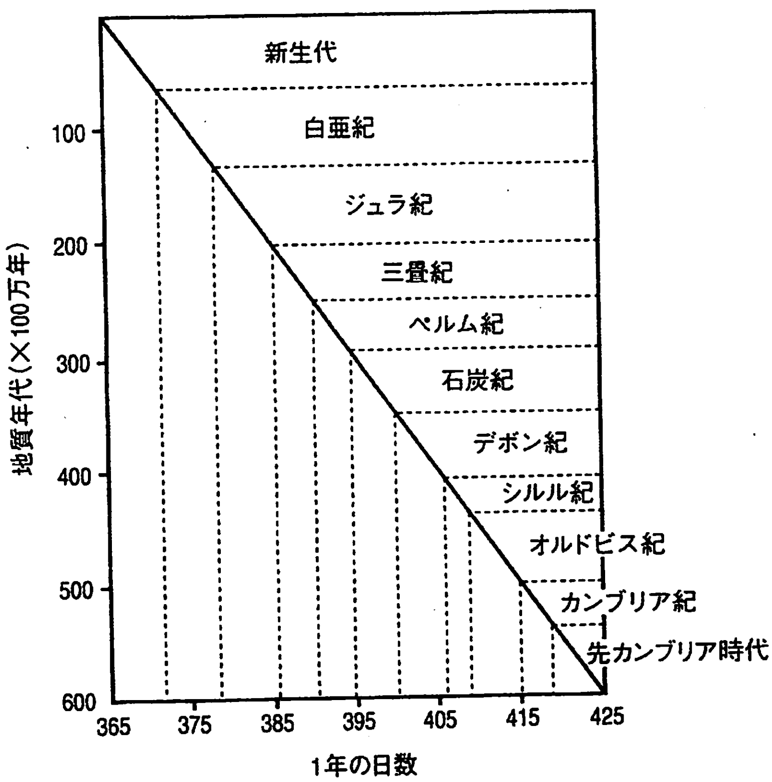
（３）エディアカラ生物群

（４）バージェス頁岩動物群

（　次ページに続く　）

問３ 次の文章を読み，設問（1），（2）に答えよ。

下図は，サンゴやストロマトライトなどから復元された各地質時代の 1 年の日数を示している。



化石記録から復元された各地質時代の 1 年の日数

Runcorn（1966）より改変

（1）地球の公転周期は現在も過去もほぼ一定であったとすると，地球の自転速度は過去から現在にむけてどのように変化してきたか，その特徴を記せ。

（2）サンゴやストロマトライトは地質時代における1年の日数を復元するために適している。その理由を述べよ。

問題３　岩石学・鉱物学（100点）

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１ 結晶構造と格子欠陥に関する次の文を読んで，以下の設問（１）－（６）に答えよ。

金属の代表的な結晶構造には，立方最密構造，六方最密構造，体心立方構造があり，そのうち(a)前者２つは最密充填構造である。AX 化合物（陽イオン A および陰イオン X）の代表的な結晶構造には(b)NaCl 型，NiAs 型，CsCl 型などがある。物質は温度・圧力条件に応じて相転移を起こし，同じ化学組成であっても結晶構造の異なる様々な多形が存在する。

一方で，(c)規則正しい構造をもつ結晶にもその内部には格子欠陥が存在し，物性に影響を与える。例えば結晶の塑性変形は線欠陥である転位のすべり運動によって起こる。金属などの単純な結晶構造では(d)原子の最密面上の最密方向へのすべりが卓越する。NaCl 型構造などのイオン結晶では，そのような幾何学的関係よりも(e)すべりに際して同種イオン間隔が近づかないことがより重要な制約となる。一般に金属に比べ，セラミックスや珪酸塩鉱物では，すべり系が少なく，(f)バーガーズベクトルの大きさが大きくなり，すべりに必要な応力も大きくなるので，非常に塑性変形しにくいことが知られている。

（１）下線部(a)について，立方最密構造（面心立方格子）の充填率を計算過程も含めて有効数字２桁で解答せよ。

（２）下線部(b)について，図１に NaCl 型の結晶構造図を示す。この構造では両イオンとも配位数(CN)が 6 で単位格子に含まれる化学式数(Z)は 4 である。一方，CsCl 型では CN=8, Z=1 である。図１にならって CsCl 型の結晶構造図を描け。

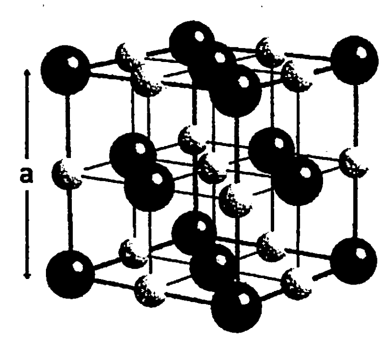


図１ NaCl型構造の単位格子の結晶構造図（格子定数a，黒丸が陰イオン，白丸が陽イオン）

（３）下線部(c)について，面欠陥のひとつに積層欠陥と呼ばれるものがある。図２に示す立方最密構造の最密面の積み重なりを例に挙げながら，積層欠陥について説明せよ。

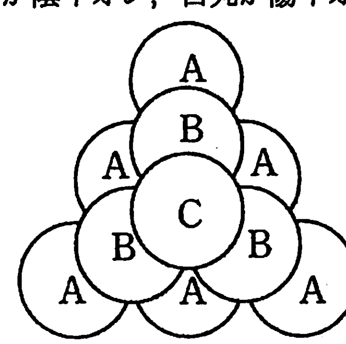


図２ 立方最密構造の最密面の原子の積み重なり

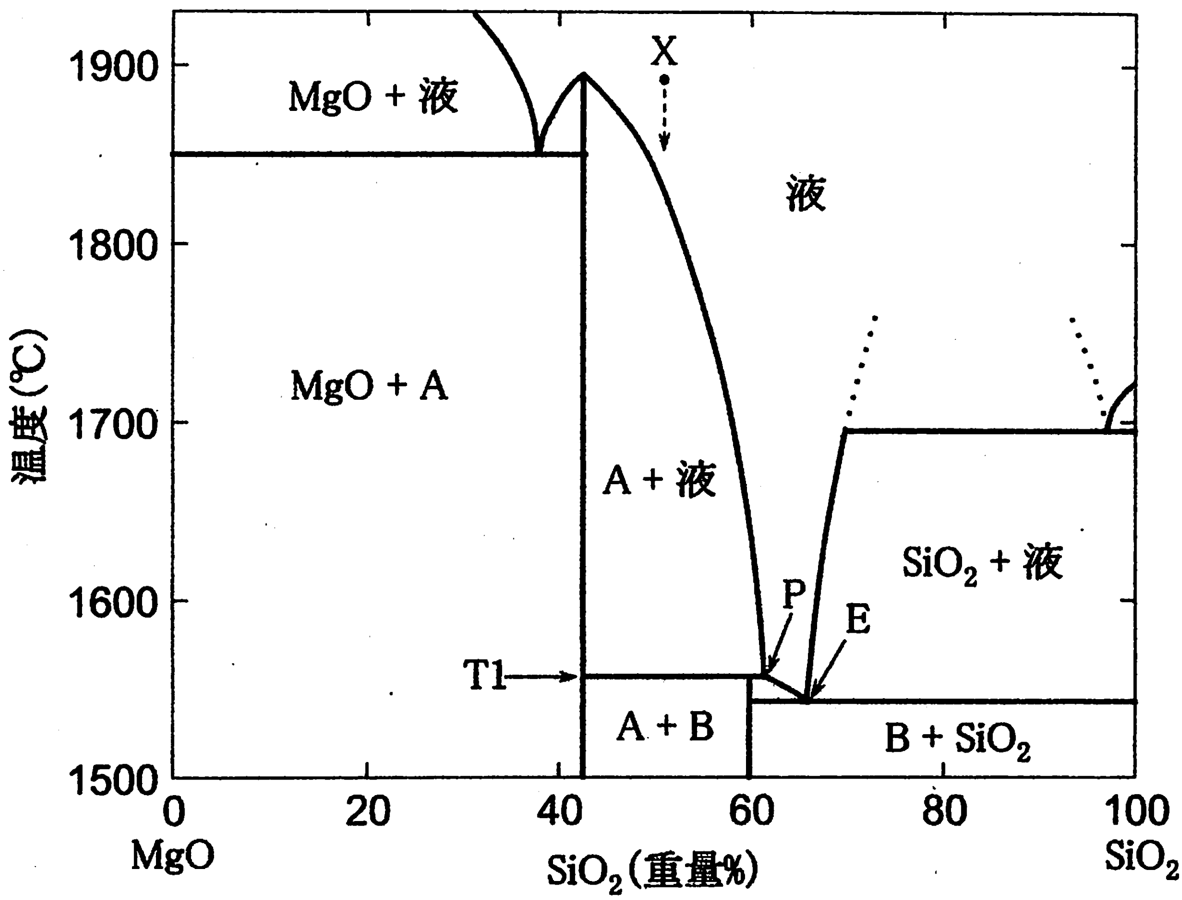
（４）下線部(d)について，立方最密構造の最密面の面指数と最密方向の方位指数を答えよ。ただし最密方向は最密面上にあるものとする。

（５）下線部(e)について，NaCl 型構造の(001)面の模式図を示し，この制約のもとに予想される NaCl 型構造のすべり面を答えよ。

（６）下線部(f)について，ある結晶中の転位を観察したところ，バーガーズベクトル **b**= [001]の転位が結晶の[001]方向に向かって直線状に分布していた。この転位は刃状転位，らせん転位のどちらであるか，理由も含めて答えよ。

（次ページに続く）

問２　下の図は 1 気圧下における $MgO\text{-}SiO_2$ 2 成分系の相平衡図であり，２つの化合物 A(42.7 重量% SiO_2) および B(59.9 重量% SiO_2) が存在する。これに関する以下の設問（１）－（５）に答えよ。必要であれば MgO と SiO_2 の分子量をそれぞれ 40.3 と 60.1 として用いよ。



（１）化合物 A および B の化学式と鉱物名を示せ。また地球上部マントルの一般的な化学組成は，MgO－化合物 A，化合物 A－化合物 B，化合物 B－SiO_2 のうち，どの範囲に分布するか答えよ。

（２）MgO，化合物 A，化合物 B，SiO_2 のうち調和融解(congruent melting)を起こさないものはどれか答えよ。また，点 P の名称を答えよ。

（３）点 X の液が冷却されたときの平衡結晶作用を考える。温度 T1 に達したときに起こる反応を説明し，そこでのギブスの相律における自由度を答えよ。

（４）設問（３）の状態から，平衡を保ったままソリダス以下の温度になったときの最終的な固相は何か答えよ。

（５）設問（３）の反応で化合物 A の周りに化合物 B の反応縁が形成され，化合物 A が液と反応しなくなったと仮定する。その後，冷却とともに進行する結晶作用を説明せよ。

問題４　一般化学（100 点）

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１　格子エネルギーは，イオン結晶を個々のイオンに分解するのに必要なエネルギーである。例えば，塩化ナトリウム（NaCl）の生成に対する格子エネルギー U は，ナトリウムの昇華熱 S，ナトリウムの第一イオン化エネルギー I，塩素の解離エネルギー D，塩素の電子親和力 E から，下の式(i)によって計算できる。

$$U = -\Delta H_f^0 + S + I + (1/2)D - E \qquad \text{(i)}$$

ただし，ΔH_f^0 は化学反応

$$Na_{(s)} + (1/2)\, Cl_{2(g)} = NaCl_{(s)} \qquad \text{(ii)}$$

における生成熱である。

図１は式(i)の各項の関係を図示したものでボルンーハーバーサイクルと呼ぶ。また表１は，塩素（Cl），ナトリウム（Na），ネオン（Ne）について，ボルンーハーバーサイクルによる計算に必要なパラメータの値をまとめたものである。

以上をもとにして，以下の設問（１）～（５）に答えよ。

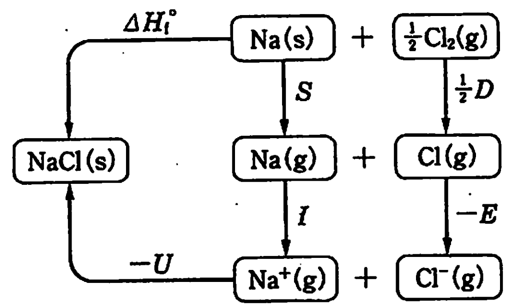


図 1. 塩化ナトリウムの生成に対するボルンーハーバーサイクル

表１．ボルンーハーバーサイクルによる計算に必要なパラメータの値（単位 kJ mol^{-1}）

	Cl	Na	Ne
第一イオン化エネルギー	1251	496	2080
電子親和力	349	53	−30
昇華熱	20	89	0
解離エネルギー	239	0	0

（１）塩化ナトリウムの格子エネルギーは，$U = 767$ kJ mol^{-1} である。化学反応(ii)によって塩化ナトリウムを生成する際の生成熱 ΔH_f^0 を算出せよ。

（２）化学反応(ii)は吸熱反応か，発熱反応か。

（３）塩化ナトリウムを加熱すると解離が起こる。このとき Na^+ と Cl^- のようにイオンになって解離する場合と，Na と Cl のように中性原子に解離する場合を考えることができる。エネルギー的に見て，どちらに解離するほうが有利か。理由とともに述べよ。

（４）イオン結晶が正電荷をもつ陽イオンと負電荷をもつ陰イオンの間に働くクーロン力によって安定していると考えると，格子エネルギーを次ページの式(iii)であらわすことができる。

(次ページに続く)

$$U = N_A \frac{Ae^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \qquad \text{(iii)}$$

ここで N_A はアボガドロ定数，e は電気素量，ε_0 は真空の誘電率，r はイオン間距離である。また A はマーデルンク定数，n は斥力に対する補正を与える値で，ともに結晶の構造によって決まるパラメータである。塩化ナトリウム型の構造では $A = 1.75$, $n = 9$ をとることが知られている。

塩化ナトリウムの格子エネルギー $U = 767\ \mathrm{kJ\ mol^{-1}}$ から式(iii)を用いて，この結晶におけるイオン間距離 r を算出せよ。計算に必要な定数として，$N_A = 6.0\times10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$ と $(e^2/4\pi\varepsilon_0) = 2.3\times10^{-28}\ \mathrm{J\ m}$ を用い，有効数字２桁で求めよ。

（５）ネオンが塩素と反応して塩化ナトリウムと同じ構造のイオン結晶をつくると仮に考える。$\Delta H_f^0 < 0$ となるための U の値を計算により求めよ。次に，このときのイオン間距離 r を算出し，Cl^- のイオン半径である 1.8×10^{-10} m より小さくなることを示せ。なお，このことはこのイオン結晶が実際には生成しないことを示している。

問２　分子中の電子に対して，そのエネルギーと空間分布を規定する軌道を考えることができる。この軌道が分子軌道，その理論が分子軌道法である。分子軌道法では，結合にあずかる一対の原子軌道が重なりあう（相互作用する）ことで２つの新しい分子軌道ができると考える。このとき新しくできる分子軌道には，結合を強める軌道である結合性軌道と結合を弱める軌道である反結合性軌道がある。

分子軌道法の理論に基づいて，以下の設問（１）～（５）に答えよ。

（１）基底状態の酸素原子の電子配置は $(1s)^2(2s)^2(2p)^4$ である。すなわち，３つある 2p 軌道に４個の電子が配置されている。このうち不対電子となっている電子は何個あるか。

（２）酸素原子の 2p 軌道同士の相互作用により形成される分子軌道は，$\sigma 2p_x$, $\sigma^* 2p_x$, $\pi 2p_y$, $\pi^* 2p_y$, $\pi 2p_z$, $\pi^* 2p_z$ である。ここで＊は反結合性軌道であることを示している。
これら６つの分子軌道のうち，$\pi 2p_y$ 軌道および $\pi^* 2p_y$ 軌道に配置される電子について，それぞれ電子の空間分布を図示せよ。

（３）設問（２）にあげた６つの分子軌道のエネルギー準位の関係と，酸素分子ができたときに電子がどのように配置されるかを図示せよ。

（４）液体酸素は常磁性を示すことが知られている。設問（３）で解答した電子配置にもとづいてこの性質があらわれる理由を説明せよ。

（５）２個の酸素原子からなる化合物としては，酸素分子 (O_2) の他に二酸素イオン (O_2^+) と超酸化物イオン (O_2^-) がある。これら３種類の化合物の結合エネルギーの大小関係を示し，そのように推定した理由を述べよ。

問題５ 地球化学（100 点）

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１ 生物に見られる炭素ならびに窒素の同位体比の変動について説明せよ。ただし，次の語句を含めること。

同位体効果，同位体分別，植物，食物連鎖

問２ 地球は炭素質コンドライト物質が集積して誕生し，その後コアーマントルの分化が起こったというモデルを考える。その分化に関する以下の文章を読み，設問（１）～（７）に答えよ。

^{182}Hf（ハフニウム）は半減期 9×10^6 年で安定同位体 ^{182}W（タングステン）に壊変する。一方，^{184}W は親核種を持たない安定同位体である。炭素質コンドライトの ^{182}W/^{184}W 比は，地球誕生からの時間の経過にともなって下図中の実線に従い変化する。ところが，Hf は W に比べ親石性が強く，マントルに濃集しやすく，逆に，親鉄性の強い W はコアに濃集しやすい。従って，ある時点で分化が起こると，コアおよびマントルでは，W と Hf の濃度比が分化前の比から変化し，^{182}W/^{184}W 比のたどる軌跡が図の実線で示した軌跡から外れる。

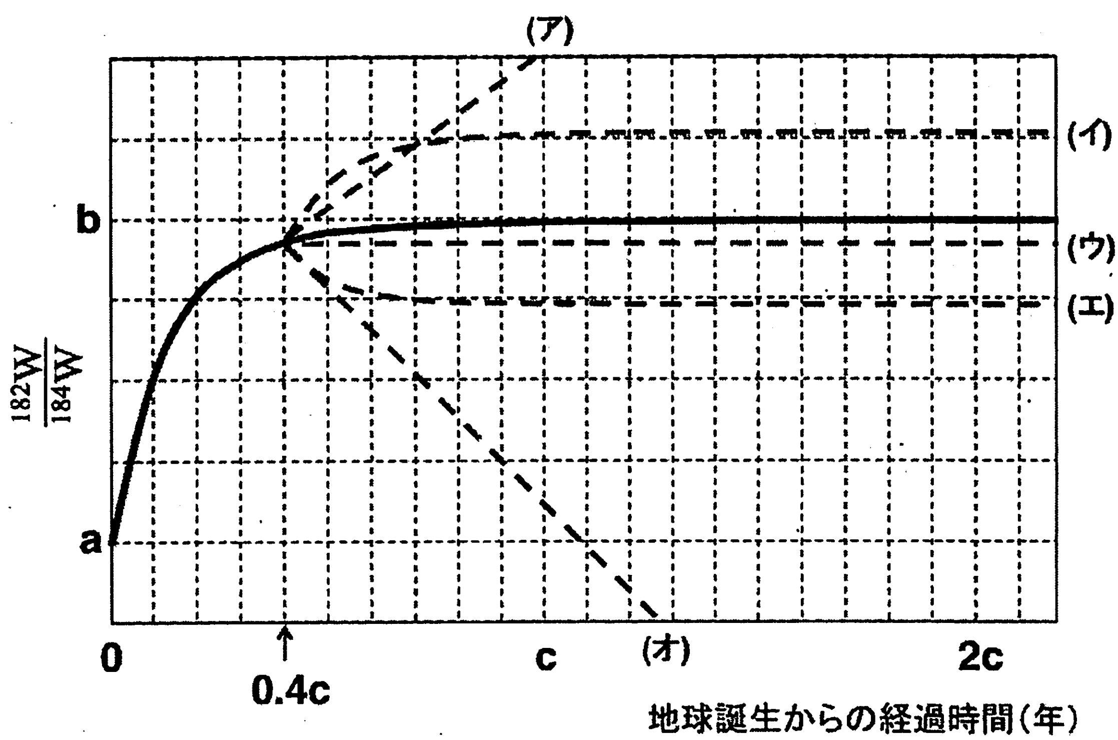


図 ^{182}W/^{184}W 比の時間変化（実線は炭素質コンドライトの変化を示す。）

（次ページに続く）

（問題５の続き）

マントルとコア中のＷ濃度（$C_{W,m}$および$C_{W,c}$）が一様で，その比がある一定の値になるように分配すると考えると，式（i）が成り立つ。

$$D_W = \frac{C_{W,m}}{C_{W,c}} \qquad \text{(i)}$$

同様に，マントルとコア中のHf濃度（$C_{Hf,m}$および$C_{Hf,c}$）について，式（ii）が成り立つ。

$$D_{Hf} = \frac{C_{Hf,m}}{C_{Hf,c}} \qquad \text{(ii)}$$

D_W，D_{Hf}はそれぞれW，Hfについてのコア－マントル間の分配定数である。また，両元素は地球から除かれることがなく，また地球の他の部分の量を無視できるので，マスバランスから式（iii），（iv）が成り立つ。

$$(M_c + M_m)C^0_W = M_c C_{W,c} + M_m C_{W,m} \qquad \text{(iii)}$$
$$(M_c + M_m)C^0_{Hf} = M_c C_{Hf,c} + M_m C_{Hf,m} \qquad \text{(iv)}$$

M_c，M_mはコアおよびマントルの質量，C^0_W，C^0_{Hf}は分化前のW，Hf濃度である。

（１）　次の元素を，コア－マントル間の分配定数Dが1より大きいグループとDが1より小さいグループに分けよ。

Mg, Al, Si, K, Fe, Ni, Co

（２）　図中の時間**c**は^{182}Hfの半減期の何倍かを答えよ。

（３）　^{182}W/^{184}W比は炭素質コンドライト，コア，マントルでどのような大小関係があるかを答えよ。

（４）　^{182}Hfは消滅核種であり，時間**2c**が経過するとその全てが^{182}Wに変わっているとしてよい。時間**2c**における炭素質コンドライトの^{182}W/^{184}W比（図中の**b**の値）はいくらか。ただし，地球誕生時において，炭素質コンドライトの^{182}W/^{184}W比は0.80（図中の**a**の値），HfおよびＷの濃度はどちらも0.10 mg/kgとし，^{182}Hfは原子数にしてHf全体の10%，^{184}WはＷ全体の30%を占めていたとする。計算にあたっては、HfとＷの原子量は等しいとせよ。また，分化に際しての同位体効果や^{182}Hf以外の放射壊変の影響は無視せよ。

（５）　式（i）～（iv）を用いて，分化後のコアおよびマントル中のＷとHfの濃度（$C_{W,m}$，$C_{W,c}$，$C_{Hf,m}$，$C_{Hf,c}$）を求めよ。$M_c = 2\times10^{24}$ kg，$M_m = 4\times10^{24}$ kg，$D_W = 0.1$，$D_{Hf} = 10$とし，またC^0_W，C^0_{Hf}については，設問（４）の炭素質コンドライトの値を用いよ。

（６）　時間**0.4c**が経過した時に，コア－マントルの分化が起こったとする。図中の破線のうち，マントル中の^{182}W/^{184}W比の時間変化を最もよく表すものを選び，破線（ア）～（オ）の記号で答えよ。

（７）　コア－マントルの分化が起こったのが時間**c**だったとする。その場合，マントル中の^{182}W/^{184}W比の時間変化の大きさは設問（６）の時間変化の大きさに比べて，大きいか，小さいか。理由とともに答えよ。

問題６　熱力学（100 点）

以下の問い（問１～問３）に答えよ。

問１　以下の文章中の $\boxed{\ 1\ }$ ～ $\boxed{\ 9\ }$ に入る数式あるいは数字を答えよ。

(a)　内部エネルギー U は物体全体の位置や運動によらず，温度 T や圧力 p のような内部状態によって決まるエネルギーである。その微小変量（dU）は，吸収する熱量 $d'Q$ と外部からなされる仕事 $d'W$ を用いて $dU=\boxed{\ 1\ }$ と表わされる。体積変化量を dV とすると，準静的な圧縮による仕事は $d'W=\boxed{\ 2\ }$ と表わされる。したがって，吸収する熱量は $d'Q=\boxed{\ 3\ }$ となる。

(b)　内部エネルギーは状態量なので，他の２つの状態量の関数として表現される。そこで温度と体積の関数とおくと，その全微分は $dU=\boxed{\ 4\ }$ と表わされる。これを $\boxed{\ 3\ }$ に代入すると，吸収する熱量は $d'Q=\boxed{\ 5\ }$ となる。したがって，定積モル比熱（１モルの物質を体積一定で温度１K 上げるのに必要な熱量）はモル数を n とすると $C_v=\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ と表現され，定圧モル比熱は C_v を用いて $C_p=\boxed{\ 6\ }$ と表現される。

(c)　理想気体では，内部エネルギーは温度のみの関数であるので，$\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T=\boxed{\ 7\ }$ となる。また気体定数を R とすると，状態方程式より $\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_p=\boxed{\ 8\ }$ となる。これらを $\boxed{\ 6\ }$ に代入することにより，マイヤーの関係 $\boxed{\ 9\ }$ が得られる。

（次ページに続く）

問２　ギブスの自由エネルギーは $G = U + pV - TS$ と定義される。以下の設問(a)～(c)に答えよ。

(a)　熱力学の恒等式（$dU = TdS - pdV$）と，G の全微分を組み合わせることによって，閉鎖系におけるギブスの自由エネルギーの微小変量（dG）が以下の式で表わされることを示せ。

$$dG = Vdp - SdT$$

(b)　ギブスの自由エネルギーを温度と圧力の関数とし，マクスウェルの関係式を導け。

(c)　吸収する熱量 $d'Q$ とそれに伴うエントロピーの変化量 dS，そのときの温度 T の間には $\dfrac{d'Q}{T} \leq dS$ の関係が成り立つ。等号は可逆変化，不等号は不可逆変化のときに成り立つ。これを用いて，等温定圧の系での不可逆変化ではギブスの自由エネルギーが必ず減少することを説明せよ。

問３　エンタルピーは $H = U + pV$ と定義される。H はギブスの自由エネルギーG を用いて以下のように表現されることを示せ。

$$H = -T^2\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{G}{T}\right)\right]_p$$

問題7　力学（100点）

以下の問い(**問1, 問2**)に答えよ。

問1 図1のように2次元xy平面上で原点Oを中心とする半径bの円周上を質量mの質点が運動している。この運動は次の式で表される。

$$(x, y) = (b\cos(\omega t), b\sin(\omega t))$$

ただし，ωは正の定数であり，tは時間である。

以下の設問（1）～（8）に答えよ。

（1）この質点のxとy方向の速度の成分v_xとv_yをtの関数として表せ。

（2）設問（1）の結果を用いて，この質点が等速運動していることを示せ。

（3）この質点のxとy方向の加速度の成分a_xとa_yをtの関数として表せ。

（4）位置ベクトル$\boldsymbol{r}$と速度ベクトル$\boldsymbol{v}$の向きの関係を記せ。

（5）位置ベクトル$\boldsymbol{r}$と加速度ベクトル$\boldsymbol{a}$の向きの関係を記せ。

（6）この質点が持つ運動量$\boldsymbol{P} = (P_x, P_y)$を$t$の関数として求めよ。

（7）この質点の原点まわりの角運動量の大きさLを求めよ。

（8）この質点に働く原点まわりの力のモーメント$\boldsymbol{N}$を求めよ。

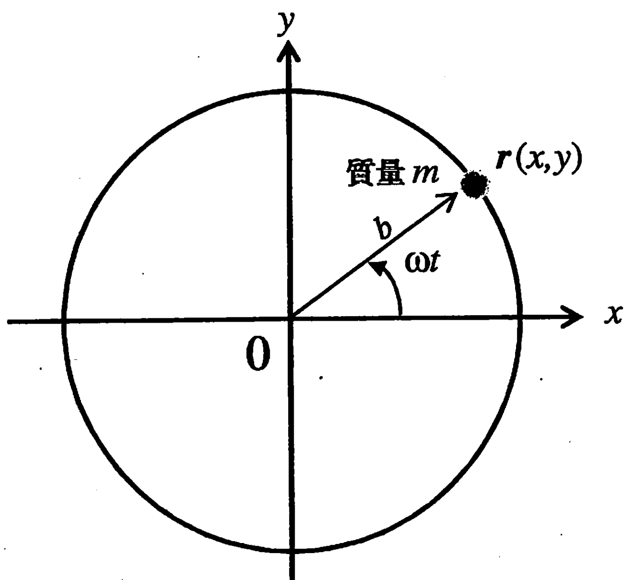


図1.　質量mを持つ質点の運動

(次ページに続く)

問２　２次元 xy 平面上でポテンシャル U が以下の式で与えられるとする。

$$U(x,y)=k\,(x^2+y^2)\qquad (k\text{ は正の定数})$$

以下の設問（１）～（４）に答えよ。ただし、物理量は無次元化されているものとする。

（１）任意の点(x, y)における力 $\boldsymbol{F}$ の成分 F_x と F_y を求めよ。

（２）今，時刻 $t=0$ で位置 $(x, y)=(1, 0)$，速度 $(v_x, v_y)=(0, 0)$で質量 m の質点が運動を始めた。この質点の任意の時刻 t (ただし $t\geq 0$)での位置を時間の関数として求めよ。また，この運動はどのような運動か記せ。

（３）次に，時刻 $t=0$ で位置 $(x, y)=(x_0, y_0)$，速度 $(v_x, v_y)=(v_{x0}, v_{y0})$ で質量 m の質点が運動を始めたという一般化された問題を考えよう。この質点の任意の時刻 t での位置を時間の関数として求めよ。

（４）また，時刻 $t=0$ で位置 $(x, y)=(-2, 1)$，速度 $(v_x, v_y)=(1,\ -2)$ で質量 $m=1$ の質点をおいた。このとき $k=1/2$ として xy 平面上での質点の運動の軌跡を図示せよ。また、この運動において質点が原点から最も遠く離れたときの距離 R_{max} と原点に最も近づいたときの距離 R_{min} を記せ。

問題８　電磁気学（100 点）

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１　図１のように，xyz 直交座標系において一辺の長さが $2a$ の正方形回路が，回路の面と一様磁場（磁束密度 $\mathbf{B}$）とのなす角が θ（$0° < \theta < 90°$）となるように置かれている。図２はこれを y 軸の正の方向からみたものである。回路には図１で示されている方向に定常電流 I が流れている。このとき，以下の設問（１）～（４）に答えよ。

（１）辺 PQ に働く力を，xyz 座標系における成分で表せ。
（２）辺 QR に働く力を，xyz 座標系における成分で表せ。
（３）辺 RS に働く力を，xyz 座標系における成分で表せ。
（４）辺 SP に働く力を，xyz 座標系における成分で表せ。

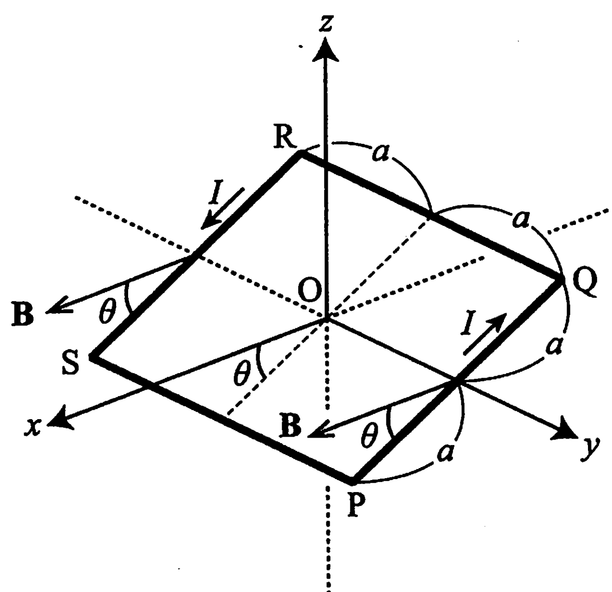


図１　一様磁場中の正方形回路

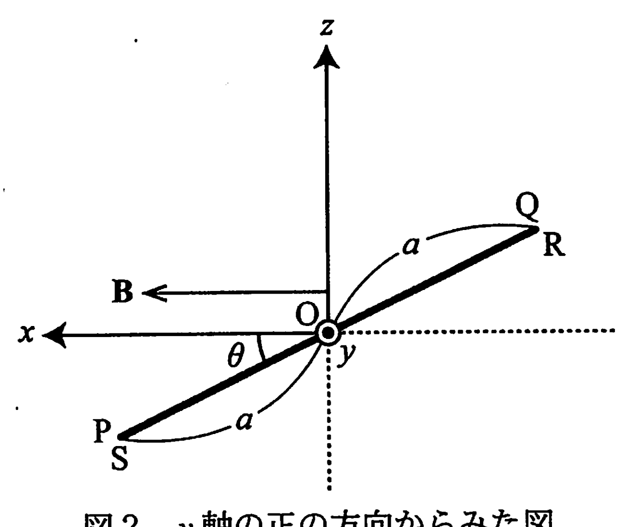


図２　y 軸の正の方向からみた図

（　次ページに続く　）

問２　以下の設問（１），（２）に答えよ。

（１）真空中の電荷と電場の関係はガウスの法則で与えられる。すなわち，閉じた曲面 S で囲まれる空間内の総電荷が Q であるとき，S 上での電場 $\mathbf{E}$ と Q の関係は

$$\int_S \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

となる。ここで $\int_S dS$ はＳ上での面積分を表し，$\mathbf{n}$ はＳの単位法線ベクトル(外向き)，ϵ_0 は真空の誘電率である。電荷が静止していて電荷分布が点 O のまわりに球対称の場合，閉曲面Ｓとして図３のように中心 O，半径 r の球面を考えれば，対称性からＳ上の電場は簡単に求めることができる。Ｓ内の総電荷を $Q(r)$ とすると，Ｓ上での電場の大きさ $E(r)$ は

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

となることを示せ。

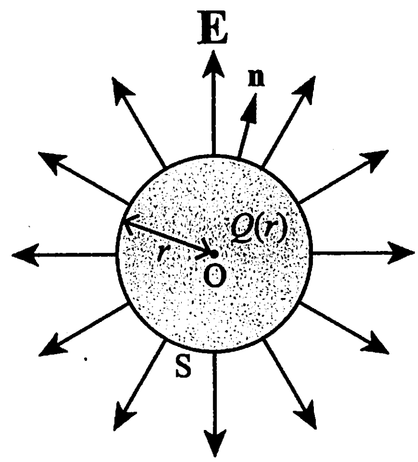


図３　球対称電荷分布による電場

（２）半径 a の球内に球対称に分布した電荷があり，その電荷密度 ρ は中心からの距離 r に比例している。すなわち電荷分布は

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \dfrac{r}{a} & (0 \le r \le a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

で与えられている。ただし，$\rho_0 > 0$ であり，電荷は静止している。このとき，以下の設問 (a)，(b) に答えよ。

(a) 電荷の作る静電場の大きさ $E(r)$ を r の関数として求め，グラフで表せ。

(b) 静電ポテンシャル $\phi(r)$ を r の関数として求め，グラフで表せ。ただし，静電ポテンシャルは無限遠で０とする。

問題9　物理数学（100点）

以下の問い（問1〜問5）に答えよ。

問1　2次の多項式 $g(x)$ を

$$g(x) = g_2x^2 + g_1x + g_0$$

とする。ここで，g_0, g_1, g_2 は定数である。このとき，2次以下の多項式 $f(x)$ で微分方程式

$$\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{df}{dx} + f = g$$

を満たすものを求めよ。

問2　3次元直交座標系 (x, y, z) を考え，その基本ベクトルを $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ とする。2つのベクトル場 $\boldsymbol{u} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + zx\boldsymbol{k}$ について以下の（1），（2）を計算せよ。

（1）$\nabla \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$

（2）$\boldsymbol{u} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})$

問3　次の方程式の一般解を求めよ。

$$\frac{dy}{dx} + 4y = e^{3x}$$

問4　1周期が

$$f(x) = x, \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

で定義される周期関数 $f(x)$ をフーリエ級数に展開して，公式

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

を導け。

問5　以下の実対称行列 A について，逆行列 A^{-1} の固有値と規格化した固有ベクトルを求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$