# 平成２６年度
# 九州大学大学院理学府
# 修士課程地球惑星科学専攻
# 入学試験問題

（全１８ページ）

（２００点，１２０分）

注意事項

(1) この問題冊子には，合計９題が出題されている。

| | | |
|---|---|---|
| 問題１　地質学 | 問題２　古環境学・古生物学 | 問題３　岩石学・鉱物学 |
| 問題４　一般化学 | 問題５　地球化学 | <u>問題６　熱力学</u> |
| <u>問題７　力学</u> | <u>問題８　電磁気学</u> | <u>問題９　物理数学</u> |

(2) <u>第１志望・第２志望ともに</u>，岩石循環科学，地球進化史，古環境学，惑星系形成進化学，有機宇宙地球化学，無機生物圏地球化学，地球惑星物質科学，地球惑星博物学の各研究グループを志望する受験生は，９問題のなかから任意に２問題を選択すること。

(3) <u>第１志望または第２志望で</u>，太陽地球系物理学，宇宙地球電磁気学，中層大気・地球流体力学，対流圏科学，固体地球惑星力学，地球内部ダイナミクス，観測地震・火山学の各研究グループを志望する受験生は，<u>問題６～問題９</u>（上記の下線を引いた問題）のなかから少なくとも１問題を含む，合計２問題を選択すること。下線を引いた問題以外から２問題を選択した場合は，無効（０点）とするので注意すること。

(4) 解答はそれぞれ別の解答用紙の枠内に書くこと（裏面使用可）。

(5) それぞれの解答用紙には，受験番号，氏名，選択した問題の番号を記入すること。

(6) この問題冊子は持ち帰ってよい。

**問題1　地質学　(100 点)**

以下の問い(問1，問2)に答えよ。

問1　次の文章を読んで，設問(1)~(4)に答えよ。

河川や海底で急速に堆積した厚い砂岩層は多くの間隙水を含んでおり，その地層に圧力がかかることにより脱水が起こる。堆積物は埋没が進むと自重により粒子同士の接触面積が増し，間隙率が減少する。このことを( A )という。( A )があまり進んでなく間隙水が地表までつながっている場合は，地下 H における間隙水圧 P は P =( B )と表すことができ，この値を( C )という。( A )が進んだ場合，地層中の圧力はその場所の上にある堆積物と間隙水によって与えられ，( D )という。

(1) 文中の空所( A )~( D )に最もよくあてはまる語句もしくは式を下記の語群より選択せよ。ただし，$\rho_g$ は粒子の密度，$\rho_f$ は間隙水の密度，g は重力加速度，H は深さとする。

圧密作用，静岩圧，間隙圧，カタクレーシス，静水圧，級化作用，脆性変形，延性変形，動的再結晶，剪断作用，$\rho_f gH$，$\rho_g gH$，$(\rho_f+\rho_g)gH$

(2) 均質で厚い砂岩層からなる Z 地域で深さ 1000m の掘削調査を行った。深さ 1000m 地点の掘削ビットにかかる圧力を求めよ。ただし，砂岩の密度を 2.5 g/cm$^3$，重力加速度を 9.8 m/s$^2$ とする。また，間隙水や亀裂の効果は無視するものとする.

(3) 堆積物の急速な脱水によって形成される変形構造について適切なものを 1) ~ 8) の中からすべて選択し，番号を記せ。

1) Bouma's sequence　　2) intra-formational fold
3) sand dike　　4) mud draping
5) concretion　　6) bioturbation
7) plumose structure　　8) convolution

(4) 以下の 3 つの用語を使用して，地震の際に報告される噴砂現象の形成過程を述べよ。

・異常間隙水圧　・摩擦抵抗　・粒子間

( 次ページに続く )

**問２**　次の文章を読んで，設問(１)～(４)に答えよ。

図１は，(　A　)で形成された海洋底が移動し，(　B　)で沈み込むことを示している断面図である。海洋底上には海洋プレート層序を示す堆積物が，(　B　)では陸源砕屑物が堆積している。海洋プレートの沈み込みに伴い陸側斜面には(　C　)が形成する。(　C　)は逆断層が発達し，層序が保存されたコヒーレント層と混在岩からなるメランジュから構成される。

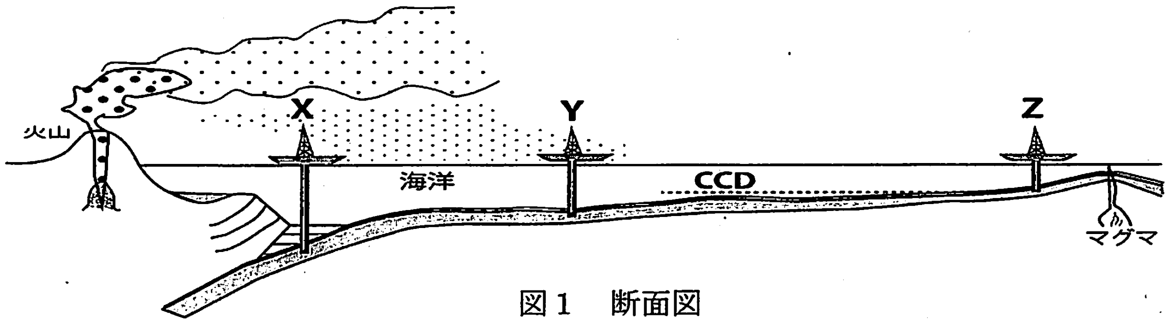



図１　断面図

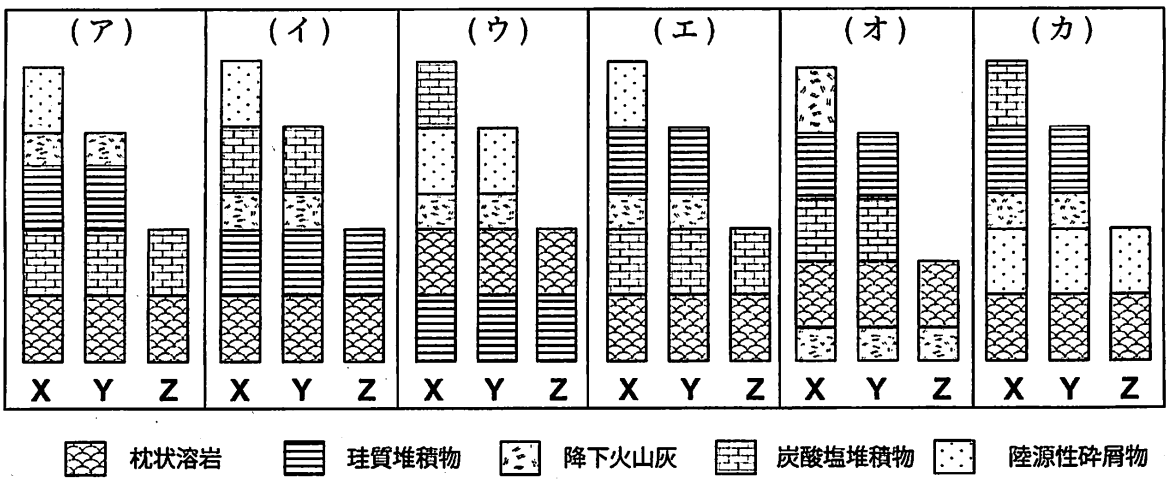



図２　X, Y, Z 地点の海洋プレート層序を示す柱状図

（１）　文中の空所(　A　)～(　C　)にあてはまる語句を英語で記せ。

（２）　図中に示された CCD を簡潔に説明せよ。

（３）　図１の X, Y, Z の地点において海底掘削により連続コアを取得した。各地点のコアから得られた柱状図について，正しい組み合わせを図２の（ア）～（カ）の中から選べ。また，海洋プレート層序が形成される過程を説明せよ。

（４）　下線のメランジュには石灰岩と互層した枕状溶岩のブロックが含まれることがある。その枕状溶岩が噴出した場所の古緯度推定法を説明せよ。

## 問題２　古生物学・古環境学（100 点）

以下の問い（**問１，問２**）に答えよ。

**問１**　次の文章を読み，設問（1）～（3）に答えよ。

(a)カンブリア紀以降，特に大規模な５回の大量絶滅イベントが識別される。とりわけペルム紀末に起きた大量絶滅（P/T 境界事変）は最大規模であった。しかし化石記録をみると，古生代に繁栄したグループの中で P/T 境界を生き延びたものも少なくない。そして(b)P/T 境界を生き延びたにもかかわらず，三畳紀末に絶滅したケースが目立つ。そのため，三畳紀末の大量絶滅（T/J 境界事変）が新たに注目を集めている。

（1）下線部（a）に関連して，ペルム紀末と三畳紀末を除く他の３回の大規模な大量絶滅が起きた地質時代を答えよ。

（2）下線部（b）に当てはまる生物の化石はどれか。下のスケッチの中からひとつを選び，図の番号１～４の数字で答えよ。さらに，その化石生物の名称を答え，その地質学的または古生物学的な意義を簡潔に説明せよ。

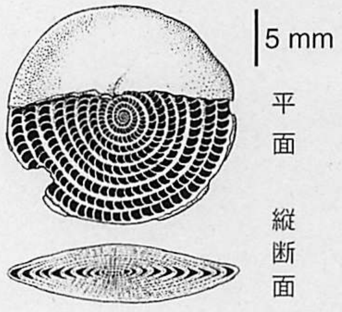



図１

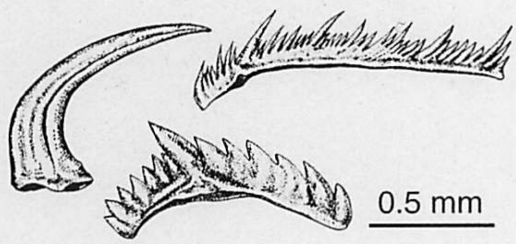



図２

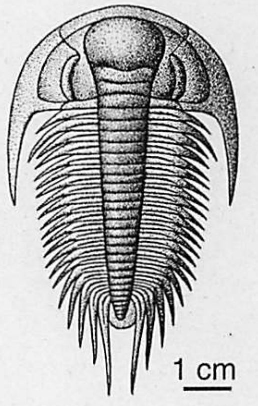



図３

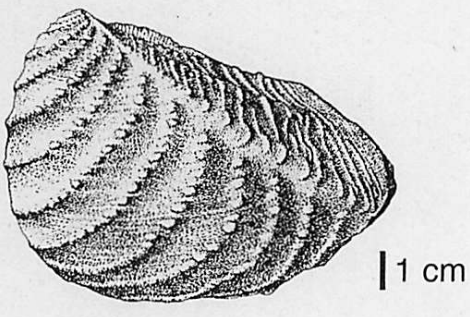



図４

<出典>1,3, 4: British Museum (Natural History) (1975);  2: 猪郷久義（1975）

（　次ページに続く　）

（３）三畳紀に関連して，下の選択肢ア〜カの中から３つを選んで名称を答えよ。エ〜カについては，例をひとつ挙げればよい。

ア．最初に三畳系の模式層序が設定された国

イ．当時，超大陸やテチス海の外側に広がっていた超海洋

ウ．ペルム紀〜三畳紀に出現して世界的に繁茂した後，東アジア原産の１種のみが現生種として生き延びている植物

エ．日本に分布する三畳系の地層名

オ．三畳系を構成要素に含む日本の地質構造帯

カ．三畳系を特徴づける化石二枚貝

**問２** 次の９つの用語から４つを選び，それらについて簡潔に解説せよ。

（１）進化の総合説（synthetic theory of evolution）

（２）マーギュリスによる細胞内共生説（symbiotic theory by Margulis）

（３）澄江生物群（Chengjiang Biota）

（４）最終氷期（last glacial stage）

（５）酸素同位体比（$\delta^{18}O = \left[ \dfrac{{}^{18}O/{}^{16}O_{sample}}{{}^{18}O/{}^{16}O_{standard}} - 1 \right] \times 1{,}000$）

（６）石灰質ナンノプランクトン（calcareous nannoplankton）

（７）統合国際深海掘削計画（IODP ; Integrated Ocean Drilling Program）

（８）岩相層序区分の層（formation）

（９）タクソン区間帯（taxon-range zone）

## 問題3　岩石学・鉱物学（100点）

以下の問い（問1，問2）に答えよ。

**問1**　次の化学組成は，地球の岩石圏を構成する鉱物の端成分である。以下の設問 **(1)**〜**(5)** に答えよ。

（あ）$Mg_2SiO_4$　（い）$MgSiO_3$　（う）$CaAl_2Si_2O_8$
（え）$NaAlSi_3O_8$　（お）$CaMgSi_2O_6$　（か）$SiO_2$

**(1)**　（あ）〜（か）の組成を持つ常温常圧で安定な鉱物名を英語で記せ。

**(2)**　（あ）〜（か）の組成を持つ常温常圧で安定な鉱物の結晶系を記せ。

**(3)**　ケイ酸塩鉱物は，その結晶構造において $SiO_4$ 四面体の結合様式の違いによって分類される。設問 **(1)** で解答した鉱物は，ネソケイ酸塩，イノケイ酸塩，テクトケイ酸塩のいずれかに分類される。それぞれの鉱物がいずれに分類されるか記せ。また，結合様式の違いを説明せよ。

**(4)**　カンラン岩，斑レイ岩，花崗岩に含まれる主要鉱物の端成分を示す化学組成を上記よりそれぞれ二つずつ選び，記せ。

**(5)**　（あ）〜（か）の組成を端成分として持つ2成分系の溶融関係が，非調和融解を含む場合がある。その2つの端成分を記せ。

**問2**　図1は横軸に組成，縦軸に温度をとった共融系および固溶体系を表す2成分系の相平衡図である。以下の設問 **(1)**〜**(5)** に答えよ。

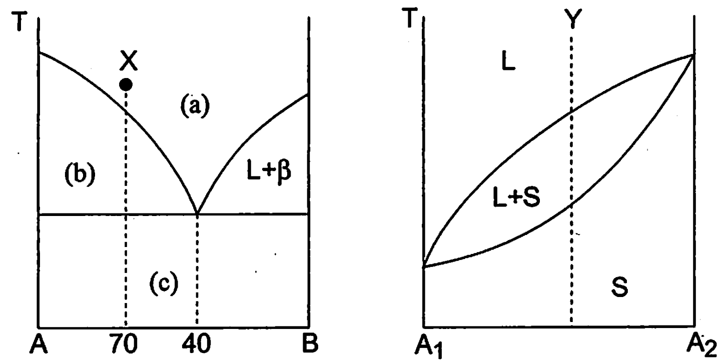



図 1: 2成分系の相平衡図。（左）共融系。（右）固溶体系。

**(1)**　共融系と固溶体系の例を，ケイ酸塩鉱物の中からそれぞれ1組ずつ挙げよ。

**(2)**　共融系の相平衡図における領域 **(a)**，**(b)**，**(c)** で安定な相の組み合わせを，図中の例にならって答えよ。ただし，成分Aと成分Bの固相をそれぞれ $\alpha$ と $\beta$ と表記する。

**(次ページに続く)**

(3) 共融系の相平衡図における領域 (a)，(b)，(c) および共融点での自由度を答えよ。また，その中から例を一つ取って自由度の意味を説明せよ。

(4) 共融系において領域 (a) の点 X であらわされる初期組成と温度を持った液で満たされたマグマだまりが，分別結晶作用によって冷却固結し，下図 (図 2) に示すような層構造が形成された。上部層と下部層では，それぞれ主要な構成鉱物の種類と量比が異なっている。上部層と下部層における主要な構成鉱物とその割合を答えよ。また，上部層と下部層の量比を推定せよ。ただし，結晶の分別は，結晶形成後直ちに重力沈降により行われ，底面に液を含まない沈降結晶だけからなる層を形成していくと仮定する。また，水平方向の温度変化や対流の影響は無視できるものとする。


図 2: 形成された層構造

(5) 設問 (4) において，端成分 A の鉱物が図 1 の右図で表される固溶体（組成 Y）であった場合，鉱物 A の組成が，層内部で鉛直方向に空間変化することが期待される。その空間変化を模式的に示し，なぜそのような変化になるか，図 1 の右図を用いて説明せよ。

## 問題　4　一般化学（100 点）

以下の問い（**問 1**，**問 2**）に答えよ。

**問 1**　次の文を読んで設問（１）～（３）に答えよ。

ある中性の原子から，電子一つを取り去るときに必要なエネルギーを第一イオン化エネルギー（$I_1$）と呼ぶ。表 1 は，原子番号 30 までの $I_1$ を示したものである。この表を参考に以下の問いに答えよ。

表 1　原子番号と第一イオン化エネルギー（$I_1$（単位は eV））の関係

| 原子番号 | $I_1$ | 原子番号 | $I_1$ | 原子番号 | $I_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 (H) | 13.60 | 11 (Na) | 5.14 | 21 | 6.54 |
| 2 (He) | 24.59 | 12 (Mg) | 7.65 | 22 | 6.82 |
| 3 (Li) | 5.39 | 13 (Al) | 5.99 | 23 | 6.74 |
| 4 (Be) | 9.32 | 14 (Si) | 8.15 | 24 | 6.77 |
| 5 (B) | 8.30 | 15 (P) | 10.49 | 25 | 7.44 |
| 6 (C) | 11.26 | 16 (S) | 10.36 | 26 | 7.87 |
| 7 (N) | 14.53 | 17 (Cl) | 12.97 | 27 | 7.86 |
| 8 (O) | 13.62 | 18 (Ar) | 15.76 | 28 | 7.64 |
| 9 (F) | 17.42 | 19 (K) | 4.34 | 29 | 7.73 |
| 10 (Ne) | 21.56 | 20 (Ca) | 6.11 | 30 | 9.39 |

（１）第 18 族元素（例えば He）の $I_1$ は特に大きいが，窒素の $I_1$ も前後の元素に比べ大きいことがわかる。

　（ア）　窒素の 3 つの p 軌道の形状を，立体的な広がりが分かるように図示せよ。

　（イ）　（ア）と窒素の電子配置をもとに，窒素の $I_1$ がこのような特徴をもつ理由を述べよ。

（２）原子番号 21 から 29 までの元素は $I_1$ の変化が少ないが，原子番号 30 の元素はやや $I_1$ が大きい。

　（ア）　原子番号 21 から 29 までの元素を総称して何と呼ぶか。

　（イ）　原子番号 30 の元素の元素名と，この原子の基底状態の電子配置を記し，この元素が，原子番号 21 から 29 までの元素に比べ $I_1$ が大きい理由を説明せよ。

　（ウ）　この表には示されていない次の周期の元素で，原子番号 30 と同様の性質を示す元素の原子番号と，4s 軌道より外側の電子の電子配置を示せ。

（３）アルカリ金属は水と反応し，水素が発生する。表にあげた 3 つのアルカリ金属元素では，この反応性にどのような違いが見られるか説明せよ。

（　次ページに続く　）

問２　次の文を読んで設問（１）～（４）に答えよ。

溶解度は，ある条件下で単位量あたりの溶媒に溶解する溶質の最大質量である。本問題中では，溶解度を溶媒１リットルに溶解する溶質のモル数（mol/l）で示す。

難溶性塩の溶解度は，溶解度積という数値から求められる。溶解度積は，難溶性塩の飽和溶液中の陽イオン濃度と陰イオン濃度の積であり，例えば AgCl の溶解度積は，

$$K_{sp}(AgCl) = [Ag^+][Cl^-]$$

で定義される。ただし，$[Ag^+]$は AgCl の飽和溶液中の $Ag^+$の濃度(mol/l)を示す。いくつかの難溶性塩の溶解度積の値を表２に示す。この表を参考にして以下の問い，問（１）～（４）について答えよ。なお問題を解くにあたり，計算過程も示すこと。必要ならば次の値を用いてもよい。$\sqrt{2} = 1.4, \sqrt{3} = 1.7, \sqrt{5} = 2.2, \sqrt[3]{2} = 1.3, \sqrt[3]{3} = 1.4, \sqrt[3]{5} = 1.7$

表２　難溶性塩の溶解度積　(25°C)

| 金属塩 | 溶解度積 |
|---|---|
| AgCl | $1.0 \times 10^{-10}$ |
| AgBr | $8.0 \times 10^{-13}$ |
| AgI | $1.5 \times 10^{-16}$ |
| $PbSO_4$ | $2.0 \times 10^{-8}$ |
| $PbI_2$ | $8.0 \times 10^{-9}$ |

（１）ハロゲン化銀の溶解度は，AgCl > AgBr > AgI の順となる。その理由を HSAB (hard-soft acid-base) 理論より説明せよ。

（２）HSAB 理論から予想され，ハロゲンイオン以外で実際に $Ag^+$や $Cu^+$と難溶性塩をつくる代表的な負イオンを一つ示せ。

（３）難溶性の金属塩の飽和溶液などでは，共通イオン効果と呼ばれる溶解度変化が起こることが知られている。

（ア）水に対する AgCl の溶解度（mol/l）を求めよ。

（イ）0.10 mol/l の NaCl 溶液に対する AgCl の溶解度（mol/l）を求めよ。

（ウ）共通イオン効果について説明せよ。

（４）$PbSO_4$ と $PbI_2$ の溶解度積の値は $PbSO_4$ の方が大きいが，水に対する溶解度は $PbI_2$ の方が大きい。

（ア）水に対する $PbSO_4$ の溶解度（mol/l）を求めよ。

（イ）水に対する $PbI_2$ の溶解度（mol/l）を求めよ。

## 問題５　地球化学（100 点）

以下の問い（問１〜問３）に答えよ。

問１　次の文章を読み，以下の設問（１）〜（４）に答えよ。

隕石は岩石学的特徴および化学組成に基づいて分類される。石質で直径約 0.2〜1mm の球粒状物質（コンドリュール）を含む隕石はコンドライトと分類される。さらにコンドライトは普通コンドライトや炭素質コンドライトなどに分類される。隕石の形成や隕石母天体で起こった出来事の年代を推測するためにさまざまな放射性核種とその生成核種が使われている。

（１）普通コンドライトはさらに H, L, LL に分類される。どのような化学組成で分類されるか 60 字程度で説明せよ。

（２）炭素質コンドライトは最も始原的な隕石と言われている。その理由を主に化学組成の観点から 60 字程度で説明せよ。

（３）隕石中に存在した短寿命放射性核種（消滅核種）を一つあげ，どのような出来事の年代を推測することに利用できるかを記せ。

（４）隕石中の長寿命放射性核種である $^{238}U$, $^{235}U$ は次式で示される放射壊変を起こす。

$$^{238}U \longrightarrow {}^{206}Pb + 8\alpha + 6\beta^-$$

$$^{235}U \longrightarrow {}^{207}Pb + 7\alpha + 4\beta^-$$

ある炭素質コンドライトのさまざまな部位の試料を用いて得られた Pb-Pb アイソクロン（等時線）を下図に示す。この結果からこの隕石の形成年代は $T = 4.553 \pm 0.004 \times 10^9$ 年と見積もられた。$T$ を求める式を示し，その方法を説明せよ。ただし，$^{204}Pb$ は放射性核種の起源をもたない。また，$(^{238}U/^{204}Pb)$, $(^{235}U/^{204}Pb)$の初期値をそれぞれ$(^{238}U/^{204}Pb)_0$, $(^{235}U/^{204}Pb)_0$とし，現在の $^{238}U/^{235}U$ 比を 137.88 とせよ。$^{238}U$, $^{235}U$ の壊変定数をそれぞれ $\lambda_{238}$, $\lambda_{235}$ とする。

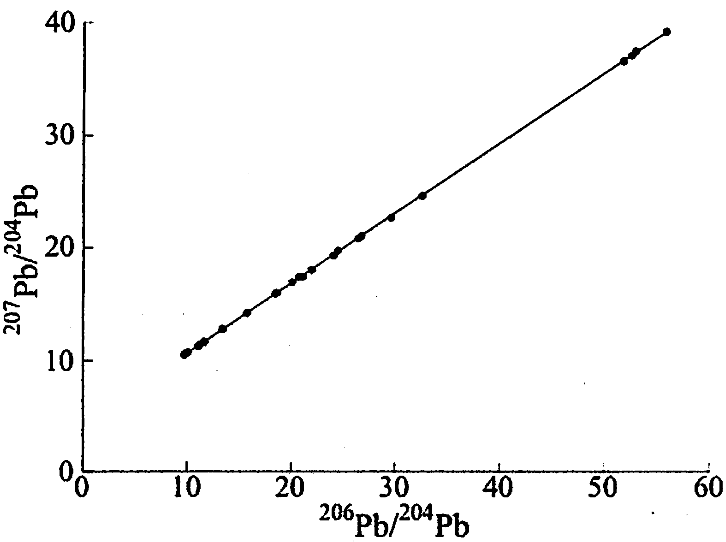



図　ある炭素質コンドライトの Pb-Pb アイソクロン（等時線）

（次ページに続く）

**問２**　下表に海水に溶解しているイオンの濃度を，陽イオンと陰イオン毎に多い順にまとめた。以下の設問（１）～（４）に答えよ。

表　海水中の主なイオンの濃度

| | 陽イオン（重量‰） | | 陰イオン（重量‰） | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $Na^+$ | 10.56 | $Cl^-$ | 18.98 |
| 2 | (ア) | 1.27 | (イ) | 2.65 |
| 3 | $Ca^{2+}$ | 0.40 | $HCO_3^-$ | 0.14* |
| 4 | $K^+$ | 0.38 | $Br^-$ | 0.065 |

*$CO_3^{2-}$ も含む

（１）表中の(ア)，(イ)に入るイオンを他の例にならってそれぞれ記せ。

（２）$Ca^{2+}$と $K^+$ の海水中での濃度はほぼ等しいのに対して，平均滞留時間には大きな違いがある。平均滞留時間が短いイオンを記し，その理由を 60 字程度で説明せよ。

（３）海水中には炭酸種として，$CO_{2(aq)}$，$HCO_3^-$，$CO_3^{2-}$が存在する（ただし，$CO_{2(aq)}$は溶存二酸化炭素）。$CO_{2(aq)}$ — $HCO_3^-$ — $CO_3^{2-}$間には化学平衡が成り立ち，水の pH に依存して，それらの相対存在度は変化する。横軸に pH の値を 0~14 にとり，縦軸に各化学種の相対存在度(%)をとった簡単なグラフを示せ。

（４）海水中の $Ca^{2+}$は主に生物活動を介して炭酸カルシウム($CaCO_3$)を生成する。$CaCO_3$ と海水($H_2O$)の 25°C における酸素同位体の分別係数を $\alpha$=1.0288 として，$CaCO_3$ の $\delta^{18}O$ 値を求めよ。ただし，海水は $\delta^{18}O = 0$ (‰)とする。

**問３**　有機物に関する以下の設問（１）～（３）に答えよ。

（１）植物によるカルビン回路を用いた光合成によって，大気中の $CO_2$ は有機物として炭素固定される。海成炭酸塩の炭素同位体比($\delta^{13}C$)を 0‰としたときの，大気 $CO_2$ と炭素固定された有機物のおおよその $\delta^{13}C$ 値をそれぞれ記せ。また，両者の $\delta^{13}C$ 値に違いが生じる原因を簡単に説明せよ。

（２）炭素固定された有機物は生合成によりさまざまな生体分子となる。アミノ酸以外の生体分子の構造式を一つ示し，その化合物名を記せ。

（３）生体を構成するＬ型アミノ酸は生物の死後，可逆一次反応によりＤ型に変化する。Ｌ型→Ｄ型，Ｄ型→Ｌ型の速度定数をそれぞれ $k$, $k'$とするとき，死後からの時間 $t$ におけるＤ型とＬ型アミノ酸の濃度比 [D]/[L]と速度定数 $k$ の関係式を示せ。ただし，[D]の初期濃度は０とし，$k = k'$としてよい。

## 問題６　熱力学（100 点）

以下の問い（問１，問２）に答えよ。

問１ 以下の設問 (A)，(B) に答えよ。

(A) 熱力学関係式に関する以下の設問 (i)〜(v) に答えよ。

(i)　内部エネルギー $U$ の全微分の式が

$$dU = TdS - PdV \tag{1}$$

であることから，ヘルムホルツの自由エネルギー $F$ の全微分の式が

$$dF = -SdT - PdV \tag{2}$$

となることを示せ。ここで，$T$ は絶対温度，$S$ はエントロピー，$P$ は圧力，$V$ は体積である。

(ii)　$F$ の全微分の式 (2) から Maxwell の関係式のひとつ

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \tag{3}$$

を導け。

(iii)　$U$ の全微分の式 (1) と Maxwell の関係式 (3) から

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \tag{4}$$

を導け。

(iv)　系の体積を一定に保ったまま，系に微小な熱 $\Delta Q$ を加えることによって，内部エネルギーが $\Delta U$ 増加したとする。すると，熱力学第一法則より

$$\Delta Q = \Delta U$$

である。このことから，定積モル比熱 $C_V$ が

$$C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{5}$$

と表されることを説明せよ。ただし，$n$ は系のモル数である。

(v)　$U$ の全微分の式 (1) と比熱の式 (5) から

$$C_V = \frac{T}{n}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \tag{6}$$

となることを示せ。

（次ページに続く）

(B) 理想気体で成立する関係式に関する以下の設問 (i)〜(iii) に答えよ。

ここで，理想気体は，状態方程式

$$PV = nRT \tag{7}$$

に従う物質であると定義される。$R$ は気体定数である。また，定積モル比熱 $C_V$ は定数であるものとする。その他の記号の意味は (A) と同じである。

(i) 式 (4) と理想気体の状態方程式 (7) から，理想気体においては，内部エネルギー $U$ について

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \tag{8}$$

が成り立つことを示せ。

(ii) 式 (5) と理想気体で成立する関係式 (8) から，内部エネルギー $U$ が絶対温度 $T$ の関数として

$$U = nC_V(T - T_0) + U_0 \tag{9}$$

と表されることを示せ。ただし，ある基準となる絶対温度 $T_0$，体積 $V_0$ において，内部エネルギーは $U_0$ であるものとする。

(iii) これまでに出てきた関係式 (1)〜(9) のうち必要なものを用いて，エントロピー $S$ が絶対温度 $T$ と体積 $V$ の関数として

$$S = nC_V \ln\frac{T}{T_0} + nR\ln\frac{V}{V_0} + S_0 \tag{10}$$

と表されることを示せ。ただし，ある基準となる絶対温度 $T_0$，体積 $V_0$ において，エントロピーは $S_0$ となるものとする。

問２ 熱力学第２法則にはさまざまな表現がある。そのうちの２つが以下の [ア] と [イ] である。[ア] から [イ] が導かれることを示せ。

[ア] ある過程の中で，熱機関が $N$ 個の熱源と順に接するものとする。それらの熱源を番号 $i = 1, \ldots, N$ で表し，それぞれの熱源の絶対温度は $T_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ であるとする。その過程においては，熱機関は $i$ 番目の熱源からそれぞれ熱 $Q_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ を受け取るものとする。熱機関のエントロピーが，その過程を経て $S_A$ から $S_B$ に変わったものとすると，

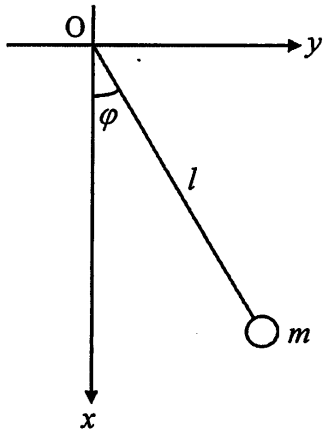
$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \leq S_B - S_A$$

が成立する。

[イ] 熱源が一つのみあるとき，その熱源から熱を取り，外部に対して正の仕事をするサイクルを行う熱機関を作ることはできない（トムソンの原理）。

## 問題７　力学（100点）

以下の問い(問１，問２)に答えよ。




**問１**　次の文を読んで，以下の設問(１)～(10)に答えよ。

図のように，重力加速度の方向を$x$軸とするデカルト座標の原点Oを支点として，質量$m$のおもりが，長さ$l$の糸で結ばれている。糸にたるみはなくて，おもりが$(x,y)$平面内を運動する場合について考えよう。デカルト座標の$z$軸は，紙面に垂直で$(x,y,z)$が右手系をなす方向とする。$x$，$y$および$z$軸方向の単位ベクトルをそれぞれ，$\vec{i}$，$\vec{j}$および$\vec{k}$とする。

図のように，糸が$x$軸となす角度を$\varphi$とする。ただし$\varphi$の値は原点を中心として反時計回りを正とし，単位はrad（無次元）とする。以下では$\varphi$の時間による1階の導関数（角速度）を$\dot{\varphi}$，2階の導関数（角加速度）を$\ddot{\varphi}$で表す。重力加速度は一定であるとし，その大きさを$g$で表す。糸は長さが一定で質量は無視できるとし，おもりは質点とみなすことができるとする。また，この系において，摩擦や抵抗力は無視できるとする。

（１）おもりの位置ベクトル$\vec{r}$を，$m$，$l$，$\cos\varphi$，$\sin\varphi$，$\dot{\varphi}$，$\vec{i}$および$\vec{j}$のうち必要なものを用いて表せ。

（２）おもりの運動量$\vec{p}$を，$m$，$l$，$\cos\varphi$，$\sin\varphi$，$\dot{\varphi}$，$\vec{i}$および$\vec{j}$のうち必要なものを用いて表せ。

（３）おもりの原点まわりの角運動量$\vec{L}$を，$m$，$l$，$\cos\varphi$，$\sin\varphi$，$\dot{\varphi}$，$\vec{i}$，$\vec{j}$および$\vec{k}$のうち必要なものを用いて表せ。

（４）糸がおもりに及ぼす張力の，原点まわりの力のモーメントは$\vec{0}$（ゼロベクトル）である。その理由を説明せよ。

（ 次ページに続く ）

（5） おもりに働く重力による原点まわりの力のモーメント$\vec{N}$を，$m$，$l$，$g$，$\cos\varphi$，$\sin\varphi$，$\vec{i}$，$\vec{j}$および$\vec{k}$のうち必要なものを用いて表せ。

（6） $\vec{L}$と$\vec{N}$の間に成り立つ関係式を，$\vec{L}$，$\vec{N}$および時間$t$による微分記号を用いて記せ。

（7） 設問（3），（5），（6）で求めた式より，角加速度$\ddot{\varphi}$は

$$\ddot{\varphi}=-\frac{g}{l}\sin\varphi \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

という微分方程式で与えられることを証明せよ。

（8） この系の力学的エネルギー$E$を，$m$，$g$，$l$，$\cos\varphi$，$\sin\varphi$および$\dot{\varphi}$のうち必要なものを用いて表せ。ポテンシャル（位置エネルギー）の基準をどこにとったか明記すること。

（9） ①式を用いて，力学的エネルギーが保存することを証明せよ。

（10） 角度$\varphi$の絶対値が1に比べて十分に小さい場合，①式は近似的に単振動の微分方程式になることを示し，単振動の周期を求めよ。

**問2** 以下の設問（1），（2）に答えよ。

（1） 質点のポテンシャル（位置エネルギー）がデカルト座標の関数$U(x,y,z)$で与えられている場合，そのポテンシャルによる力$\vec{F}$はどのような式で与えられるか答えよ。問題文に与えられていない記号を用いる場合は，記号の定義を記すこと。

（2） 質量$M$の質点Aと質量$m$の質点Bが，距離$r$離れているときの万有引力のポテンシャルは，無限に離れているときを基準にとると

$$U(r)=-\frac{GMm}{r}$$

という式で与えられる。ここで$G$は万有引力定数である。質点Aが位置$(x_0,y_0,z_0)$にあり，質点Bが位置$(x,y,z)$にあるときに質点Bに働く万有引力の$z$成分$F_z$を設問（1）で答えた式を用いて求めよ（途中の計算を詳しく記すこと）。

**問題８　電磁気学　（１００点）**

以下の問い（**問１～問４**）に答えよ。

**問１** 真空中のマクスウェル方程式（ (a) 電場についてのガウスの法則, (b) 磁場についてのガウスの法則, (c) ファラデーの電磁誘導の法則, (d) アンペール－マクスウェルの法則）を微分形で記せ。ただし，電場ベクトルは $\mathbf{E}$，磁束密度ベクトルは $\mathbf{B}$，電荷密度は $\rho$，電流密度ベクトルは $\mathbf{j}$，真空中の誘電率は $\varepsilon_0$，真空中の透磁率は $\mu_0$，とする。

**問２** 次の文章を読んで，設問 (1)～(3) に答えよ。解答用紙には答だけでなく答に至る計算経過も記せ。

２つの導体球殻 A，B を考える。A の半径は $a$，B の半径は $b$ $(a < b)$ とする。A と B の中心は同じ位置にあるものとする。球殻の厚さは，A，B ともに，無視出来る程薄いものとする。

球の中心位置に点電荷 $q_0$ があり，球殻上の電荷分布は A，B とも球対称とする。A 上の電荷の総和は $Q$，　B 上の電荷の総和はゼロ，とする。

A と B の間は誘電率 $\varepsilon$ の誘電体で満たされ，他は真空である。また，この誘電体は，$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ の関係式を満たす（$\mathbf{D}$ は電束密度ベクトル，$\mathbf{E}$ は電場ベクトル)。

(1) 物質中の電場についてのガウスの法則を使い，電束密度 $\mathbf{D}$ の動径方向成分 $D_r$ を，球の中心からの距離 $r$ の関数 $D_r(r)$ として求めよ。
(2) 電場 $\mathbf{E}$ の動径方向成分 $E_r$ を，$r$ の関数 $E_r(r)$ として求めよ。
(3) A，B の電位 $\phi_\mathrm{A}$，$\phi_\mathrm{B}$ を求めよ。ただし，無限遠で電位ゼロ，とする。

**問３** 次の文章を読んで，設問 (1)～(4) に答えよ。解答用紙には答だけでなく答に至る計算経過も記せ。

面積 $S$，間隔 $d$ の２枚の平行な電極板の間を，電解質溶液で満たした。この電解質溶液は電気伝導度 $\sigma$（定数）を持ち，外部から電場 $\mathbf{E}$ がかかった場合には「電場に平行で，電場の大きさに関わらず大きさ一定」の分極ベクトル $\mathbf{P}$ を持つものとする。この電極に電池をつないだとき，電流 $I$ が流れた。

このとき，以下の物理量 (1)～(4) を，$S$，$d$，$\sigma$，$P$，$I$，$\varepsilon_0$ のうち必要なものを用いて表せ。ただし，$P$ は $\mathbf{P}$ の絶対値，$\varepsilon_0$ は真空中の誘電率，とする。

(1) 電解質溶液中の電流密度の大きさ $j$
(2) 電解質溶液中の電場の大きさ $E$
(3) 電極板間の抵抗 $R$
(4) 正の電荷がたまっている電極板上の，分極電荷を除いた総電荷量 $Q$

**（次ページに続く）**

**問４** 次の文章を読んで，設問 (1)〜(3) に答えよ。解答用紙には答だけでなく答に至る計算経過も記せ。

$xyz$ 座標系の $z<0$ の領域（以下「領域１」とする）全体に磁性体が一様に分布しており，$z>0$ の領域（以下「領域２」とする）は真空であるとする。全ての物理量は時間変化せず，各領域で一様であるとする。

領域１の（一様な）磁束密度ベクトル $\mathbf{B_1}$ は $x$ 成分 $z$ 成分のみ持ち $y$ 成分はゼロで，$z$ 軸と $\mathbf{B_1}$ との間の角は $\theta_1$ とする。つまり，$B_{1x}=B\sin\theta_1$，$B_{1y}=0$，$B_{1z}=B\cos\theta_1$，である（$B$ は定数）。また，領域１の磁性体の持つ磁化ベクトル $\mathbf{M_1}$ は一様で，$\mathbf{B_1}$ に平行で，その大きさは $M$（定数）とする。電流はどこにも流れていないものとする。また，真空中の透磁率を $\mu_0$ とし，領域２の磁束密度ベクトルを $\mathbf{B_2}$ とする。

(1) 磁場についてのガウスの法則と，全物理量の $x$ 微分と $y$ 微分が全領域でゼロである事を用いて，$\mathbf{B_1}$ の $z$ 成分 $B_{1z}$ と $\mathbf{B_2}$ の $z$ 成分 $B_{2z}$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) 物質中のアンペールの法則より，領域１の磁場の強さ $\mathbf{H_1}$ の $x$ 成分 $H_{1x}$ と，領域２の磁場の強さ $\mathbf{H_2}$ の $x$ 成分 $H_{2x}$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) (1)と(2)で得た２つの関係式から，$z$ 軸と $\mathbf{B_2}$ との間の角 $\theta_2$ を以下の関係式により $\theta_1$ で表す事ができる：

$$\tan\theta_2 = （ア）\tan\theta_1$$

この（ア）に入る式を求めよ。

**問題9　物理数学（100 点）**

以下の問い（問１〜問５）に答えよ。解答用紙には<u>計算の途中経過</u>も書くこと。

**問 1**　ベクトル演算子に関する以下の設問（1），（2）に答えよ。ただし，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$は$x, y, z$方向の単位ベクトルである。

（1）次の公式を証明せよ。

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{B}$$

ここで，$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ である。

（2）次の 3 次元のベクトル場について，$\mathrm{div}\boldsymbol{X}$ を求めよ。

$$\boldsymbol{X} = \left(\frac{x}{2} - y^2\right)\boldsymbol{i} + \left(x^2 + \frac{y}{2} - z\right)\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$$

**問2**　以下の設問（1），（2）に答えよ。

（1）次の行列$A$がユニタリー行列であることを示せ。ここで，$i$は虚数単位である。

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

（2）行列$A$の固有値と固有ベクトルを求めよ。

**問3**　次の常微分方程式が完全微分形であることを示し，その一般解を求めよ。

$$(2x\cos y + y^2\cos x)dx + (2y\sin x - x^2\sin y)dy = 0$$

**（　次ページに続く　）**

問４　以下の設問（１），（２）に答えよ。

（１）$\sin\theta$ を複素指数関数を用いて表せ。

（２）設問（１）の結果を用いて，次の定積分を計算せよ。

$$\int_0^{2\pi} \sin^4\theta d\theta$$

問５　次の周期$2\pi$の関数$f(x)$をフーリエ級数で表せ。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ \sin x & (0 < x < \pi) \end{cases}$$