

問題 8 物理数学 (100 点)

以下の問い(問 1～問 5)に答えよ。

問 1 次の等式 (1), (2) が成り立つことを示せ。ただし,  $i$  は虚数単位とする。

$$(1) \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i} = -\frac{2}{5}$$

$$(2) \tan\vartheta = \frac{1 e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{i e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}$$

問 2 ベクトル  $\mathbf{A}$  が以下の式 (1), (2) で与えられるとき,  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  と  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  を求めよ。ここで,  $\mathbf{c}$  は定ベクトル,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$  とし,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は,  $x, y, z$  方向の単位ベクトルとする。ただし,  $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$  とする。

$$(1) \mathbf{A} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$$

$$(2) \mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

問 3 次の微分方程式 (1), (2) の一般解を求めよ。

$$(1) \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = 0$$

$$(2) \frac{dy}{dx} + y - xe^x = 0$$

問 4 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

問 5 次の周期  $2\pi$  の関数  $f(x)$  をフーリエ級数で表せ。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0) \\ x^2 & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$